

REPUBLIQUE DU BENIN

\*\*\*\*\*

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique



\*\*\*\*\*

VERECHAGUINE ANDREI KONSTANTINOVICH

\*\*\*\*\*

ECOLE SUPERIEURE DE GENIE CIVIL

\*\*\*\*\*

MEMOIRE DE MASTER PROFESSIONNEL

**OPTIMISATION DE LA PORTEE DE LA  
VOUTE NUBIENNE AVEC LA THEORIE DE  
LA CHAINETTE, EN TENANT COMPTE  
DES CONDITIONS AUX ETATS LIMITES**

*Présenté et soutenu par : **AHOSSI Akuété Damien** titulaire du diplôme de Licence  
Professionnelle, pour l'obtention du diplôme de Master Professionnel en Génie Civil*

*Mention : Génie Civil*

*Spécialité : BATIMENT ET OUVRAGE D'ART*



*Maître de mémoire*

**Dr. DOKO KOUANDETE Valery**



*Co - Maître de mémoire*

**Ing. GBAGUIDI T. Brice**

*Année académique 2015 - 2016*

6<sup>ème</sup> Promotion

REPUBLIQUE DU BENIN



\*\*\*\*\*

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique



\*\*\*\*\*

VERECHAGUINE ANDREI KONSTANTINOVICH

\*\*\*\*\*

ECOLE SUPERIEURE DE GENIE CIVIL

\*\*\*\*\*

MEMOIRE DE MASTER PROFESSIONNEL

**OPTIMISATION DE LA PORTEE DE LA  
VOUTE NUBIENNE AVEC LA THEORIE DE  
LA CHAINETTE, EN TENANT COMPTE  
DES CONDITIONS AUX ETATS LIMITES**

*Présenté et soutenu par : **AHOSSI Akuété Damien** titulaire du diplôme de Licence  
Professionnelle, pour l'obtention du diplôme de Master Professionnel en Génie Civil*

*Mention : Génie Civil*

*Spécialité : BÂTIMENT ET OUVRAGE D'ART*

COMPOSITION DU JURY

- Président : Professeur AHOUANNOU Clément
- Rapporteur : Ing. IDOHOU Gabriel
- Membre : Dr DOKO K. Valery
- Membre : Ing. GBAGUIDI Brice

*Date de soutenance : 17 Décembre 2016*

*FICHE DE CERTIFICATION DE L'ORIGINALITE DU MEMOIRE*

Je soussigné AHOSSEI Akuété Damien, Certifie que ce travail réalisé sous la direction du Docteur DOKO K. Valery et de l'ingénieur GBAGUIDI T. Brice, est original et n'a jamais été présenté pour l'obtention de quelques grades universitaires que ce soit.

Maître de mémoire

Co-Maître de mémoire

Date :

Date :

Signature

Signature

**Dr. DOKO K. Valery**

**Ing. GBAGUIDI T. Brice**

Auteur

Date :

Signature

**AHOSSI A. Damien**

## FICHE DE CERTIFICATION DES CORRECTIONS DU MEMOIRE

Auteur

Maître de mémoire

Date :

Date :

**AHOSSI A. Damien**

**Dr. Ing. DOKO K. Valery**

Le Directeur Académique

Date :

Signature

**Professeur Dominique K. SOHOUNHLOU**

## SOMMAIRE

|                                                                                 |       |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------|
| FICHE DE CERTIFICATION DE L'ORIGINALITE DU MEMOIRE .....                        | iii   |
| FICHE DE CERTIFICATION DES CORRECTIONS DU MEMOIRE.....                          | v     |
| SOMMAIRE .....                                                                  | vii   |
| DEDICACE.....                                                                   | xi    |
| AVANT PROPOS .....                                                              | xii   |
| REMERCIEMENT.....                                                               | xiv   |
| RESUME.....                                                                     | xvi   |
| ABSTRAT .....                                                                   | xvii  |
| LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS.....                                         | xviii |
| SYMBOLES .....                                                                  | xviii |
| ABREVIATIONS.....                                                               | xxii  |
| LISTE DES FIGURES .....                                                         | xxiii |
| LISTES DES IMAGES .....                                                         | xxiv  |
| LISTE DES TABLEAUX .....                                                        | xxvi  |
| INTRODUCTION GENERALE .....                                                     | 27    |
| CHAPITRE 1 : METHODOLOGIE DE RECHERCHE ET GENERALITE SUR LA VOÛTE NUBIENNE..... | 29    |
| I- METHODOLOGIE DE RECHERCHE ET HYPOTHESES DE CALCUL .....                      | 29    |
| 1.1 Démarche méthodologique de l'étude .....                                    | 29    |
| 1.2 Matériels de l'étude et hypothèses de calcul.....                           | 30    |
| II- JUSTIFICATION ET OBJECTIFS DE L'ETUDE .....                                 | 33    |
| 2.1. Contexte et justification de l'étude.....                                  | 33    |
| 2.2. Objectif général .....                                                     | 34    |
| 2.1.1 Objectifs spécifiques .....                                               | 34    |
| 2.1.2 Les résultats attendus.....                                               | 35    |
| III- SYNTHESE SUR LA TECHNIQUE DE LA VOÛTE NUBIENNE .....                       | 36    |
| 3.1 Origine et historique de la voûte nubienne .....                            | 36    |
| 3.2 Revue bibliographie sur la voûte nubienne .....                             | 38    |

|                                                                   |                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3                                                               | Caractéristiques physico-mécaniques des matériaux .....                         | 40 |
| 3.3.1                                                             | La terre de barre .....                                                         | 41 |
| 3.3.2                                                             | Les celluloses utilisées .....                                                  | 41 |
| 3.3.3                                                             | La formulation pour une brique en banco .....                                   | 42 |
| CHAPITRE 2 : OPTIMISATION DE LA PORTEE DE LA VOÛTE NUBIENNE ..... |                                                                                 | 45 |
| I-                                                                | L'ALLURE IDEALE DE LA VOÛTE NUBIENNE .....                                      | 45 |
| 1.1.                                                              | La théorie de la chaînette .....                                                | 45 |
| 1.1.1.                                                            | Hypothèses sur la courbe de la chaînette .....                                  | 45 |
| 1.1.2.                                                            | Expression mathématique de la courbe d'une chaînette .....                      | 47 |
| 1.2.                                                              | Détermination de la portée maximale d'une chaînette .....                       | 52 |
| 1.2.2.                                                            | La longueur développée de la chaînette.....                                     | 52 |
| 1.2.3.                                                            | La flèche de la chaînette .....                                                 | 53 |
| 1.3.                                                              | Modélisation de la Voûte Nubienne.....                                          | 55 |
| 1.3.1.                                                            | La parité de la fonction cosinus hyperbolique .....                             | 56 |
| 1.3.2.                                                            | Tracé de la courbe de la chaînette renversée au moyen du programme EXCEL .....  | 57 |
| 1.4.                                                              | La nature des efforts dans la chaînette renversée.....                          | 61 |
| II-                                                               | STABILITE STRUCTURALE DE LA VOUTE NUBIENNE .....                                | 63 |
| 2.1.                                                              | La descente des charges sur la voûte nubienne .....                             | 63 |
| 2.1.1.                                                            | Le poids d'une brique.....                                                      | 63 |
| 2.1.2.                                                            | La surface de remplage .....                                                    | 64 |
| 2.2.                                                              | Détermination des efforts internes dans la voûte par la méthode graphique ..... | 65 |
| 2.2.1.                                                            | La ligne des pressions .....                                                    | 65 |
| 2.2.2.                                                            | Efforts normaux internes développés dans la voûte .....                         | 69 |
| III-                                                              | CALCUL DE LA CONTRAINTE MAXIMALE INDUITE .....                                  | 77 |
| 3.1.                                                              | La contrainte dans la voûte sans le remplage .....                              | 77 |

|                                                                                 |                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1.1.                                                                          | La contrainte maximale dans les briquettes .....                                | 77  |
| 3.1.2.                                                                          | La contrainte dans le mur porteur .....                                         | 78  |
| 3.2.                                                                            | La contrainte maximale induite pour une voûte avec remplage .....               | 82  |
| 3.2.1.                                                                          | La contrainte dans la brique .....                                              | 82  |
| 3.2.2.                                                                          | La contrainte dans le mur porteur .....                                         | 82  |
| 3.3.                                                                            | Equilibre statique de la voûte .....                                            | 85  |
| 3.3.1.                                                                          | Frottement .....                                                                | 85  |
| 3.3.2.                                                                          | Equilibre limite du mur porteur .....                                           | 87  |
| 3.3.3.                                                                          | Vérification de la stabilité de l'ouvrage .....                                 | 93  |
| CHAPITRE 3 : MODELISATION ET SIMULATION DE LA PORTEE DE LA VOÛTE NUBIENNE ..... |                                                                                 | 95  |
| I-                                                                              | MISE EN ŒUVRE DE LA VOUTE NUBIENNE .....                                        | 95  |
| 1.1.                                                                            | La pose de brique dans la voûte .....                                           | 95  |
| 1.1.1.                                                                          | L'inclinaison des briques lors de la pose .....                                 | 95  |
| 1.1.2.                                                                          | L'appareillage des briques au niveau du mur porteur .....                       | 96  |
| 1.2.                                                                            | Le mortier .....                                                                | 97  |
| 1.2.1.                                                                          | Le mortier de fabrication des briques .....                                     | 97  |
| 1.2.2.                                                                          | Le mortier de pose des briques .....                                            | 99  |
| II-                                                                             | MODELISATION DE LA VOUTE AVEC LE LOGICIEL ROBOT .....                           | 100 |
| 2.1.                                                                            | La structure en voûte .....                                                     | 100 |
| 2.2.                                                                            | Les étapes de la modélisation, au dimensionnement de la voûte .....             | 101 |
| III-                                                                            | ANALYSE ET DISCUSSION .....                                                     | 118 |
| 3.1.                                                                            | Présentation des résultats .....                                                | 118 |
| 3.1.1.                                                                          | Récapitulatif des calculs sur VSR et sur VAR .....                              | 118 |
| 3.1.2.                                                                          | Récapitulatif des calculs des contraintes normales dans les murs porteurs ..... | 119 |

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                                                                                                             |     |
| 3.1.3. Récapitulatif du résultat de la modélisation d'une VSR dans Robot comparé au calcul analytique ..... | 119 |
| 3.2. Discussion .....                                                                                       | 120 |
| CONCLUSION.....                                                                                             | 125 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....                                                                            | 127 |
| TABLE DES MATIERES .....                                                                                    | 130 |

## **DEDICACE**

L'accomplissement de toutes bonnes œuvres humaines est avant tout voulue et soutenu par Dieu le Père Tout Puissant et sa cour Céleste.

Bien que ce travail soit personnellement accompli, je n'ai pas manqué l'assistance tant bien physique, morale, matérielle que spirituelle de bon nombre de personnes.

Je voudrais dédier ce document :

- ✓ A Saint Jean et à Saint Ignace qui m'ont placé sous leur protection
- ✓ A mon très chair SOSSOU Narcisse, un vrai compagnon dans la foi
- ✓ Au Père Servais, recteur de la CASA BALTHASAR pour l'œuvre d'amour dont il est en charge.
- ✓ A la communauté de SAINT JEAN
- ✓ A mes parents

## **AVANT PROPOS**

L'évolution scientifique et technologique doit son essor prodigieux aux multiples travaux de recherche qui ont généralement pour but de résoudre les problèmes rencontrés par l'homme, dans la transformation de la matière et de son environnement.

Depuis des millénaires, l'action de l'homme sur la nature n'est certes pas dénuée de conséquences ; soit avantageux ou, dans le cas contraire, vraiment préjudiciables.

Cependant elle vise l'épanouissement de l'homme dans son environnement. Et c'est justement ce dernier point surtout qui a toujours poussée le génie de l'homme à se dépasser lui-même, à la recherche du mieux êtres.

Dans le domaine du génie civil, nous pouvons de mieux en mieux, appréhender le comportement de la matière face aux diverses sollicitations auxquelles elle est soumise, grâce aux travaux de recherche de Robert Hooke, de Navier Bernoulli et de leurs pairs qui sont venus révolutionner la recherche en génie civil.

C'est fort de cela que des travaux de recherches ont été initié sur les voûtes nubiennes depuis quelques années, dans le but de faire la promotion d'une technique antique de construction des toitures en voûte sans coffrage : Voûte Nubienne.

Après que les études réalisées sur le mode de transmission de charges, propre à ces types de constructions, ont été ébauchées, vient une deuxième phase de cette recherche qui est consacrée à la recherche de sa portée maximale tout en tenant compte de la théorie de la chaînette.

En effet, la forme idéale qui exprime fidèlement le mode de transmission des charges dans la Voûte Nubienne est celle de la

chaînette renversée. Le présent document s'inscrit dans cette perspective et se veut être un tremplin pour apporter les informations nécessaires dans l'utilisation de cette technique pour réaliser des toitures en voûte franchissant de grande portée.

Pour atteindre cet objectif, nous nous appuierons d'une part, sur les travaux de recherches antérieurs réalisés sur la Voûtes Nubiennes tant bien sur le plan national, qu'au-delà des frontières, et d'autres parts, et surtout, sur les règles fondamentales de la statique graphique et la loi comportementale des matériaux définie par Robert Hooke.

## REMERCIEMENT

L'aboutissement de ce travail n'aura été effectif sans l'assistance et l'aide précieuse de mon maître de stage le Docteur DOKO K. Valery et de mon co-maître l'Ingénieur GBAGUIDI, qui n'ont ménagé aucun effort pour un bon déroulement des travaux de recherche entrepris. A nos chers professeurs, je voudrais qu'ils reconnaissent à travers ce modeste travail le fruit d'un dur labeur auquel ils ont eu participé activement à travers les deux années de formation au cours desquels ils ont, avec abnégation, partagé leur connaissance avec nous.

Je veux nommer en premier lieu le Professeur GBAGUIDI AÏSSE Gérard en sa qualité de Directeur General de ESGC-VAK, qui a permis et voulu offrir un cadre d'enseignement supérieur et assurer une bonne formation des étudiants en dotant son école d'éminents et d'illustres formateurs :

- ✓ Le Professeur Éric Amos FOUJDET, Professeur des Universités Hors Classe, CRESA Forêt-Bois, Université de Dschang, Cameroun,
- ✓ Le Docteur Victor ANANOUEH, Directeur de la Construction de la Législation et de la réglementation à la DGHC MUHA
- ✓ Le Professeur ADANHOUME Villévo, Professeur à la chaire des Mathématiques ICMPE-UNESCO et à l'EPAC
- ✓ Le Professeur Alain ADOMOU, Maître de Conférences des Universités du CAMES, Enseignant à l'UIT Lokossa
- ✓ Le Docteur DOKO K. Valery, Enseignant Assistant, à Université d'Abomey Calavi
- ✓ L'Ingénieur Philippe GALIMARD, chercheur au laboratoire de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux

C'est aussi l'occasion pour moi de remercier tous le personnel,  
depuis le simple employé, jusqu'au haut gradé de l'Ecole Supérieure  
de Génie Civil VERECHAGUINE A.K

A vous tous merci.

## RESUME

La statique est une science qui a pour objet premier l'étude des forces indépendamment de leur mouvement. En science appliquée, la statique couvre un domaine plus vaste ce qui lui vaut le nom de la statique appliquée. Contrairement à la dynamique, elle étudie les conditions d'équilibres des corps au repos.

Fort de cela, le présent mémoire s'est beaucoup évertué, dans la recherche de l'optimisation de la portée d'une voûte nubienne avec la théorie de la chaînette en tenant compte des conditions aux états limite, à répondre aux problèmes de simulation des efforts internes dans la voûte. Cette simulation servira à faire l'étude de stabilité d'une structure en voûte nubienne.

Dans un premier temps, il sera question d'élaborer la formule de chaînette au moyen des formules mathématiques et du théorème du centre d'inertie appliqué à notre système.

Ensuite, grâce au programme d'Excel, une simulation de la courbe pour différentes valeurs du paramètre « a » a été effectuée. Enfin, avec le tracé du polygone funiculaire, les efforts internes ont été déterminés graphiquement.

La simulation d'une voûte nubienne par la méthode des éléments finis avec le logiciel Robot est venue couronner le travail, montrant avec exactitude combien le franchissement de la portée, fixée par l'Association Voûte Nubienne (3,5 m), n'a pas été préjudiciable à la stabilité de la voûte nubienne, pour le cas d'école choisi d'une voûte de portée 5,27m.

**Mots clés :** Statique graphique, science appliquée, dynamique simulation, stabilité, structure, voûte nubienne, chaînette.

## ABSTRAT

Statics is a science which deals at first with force study apart from their movement. In applied sciences, statics covers a large field, that gives to her the name of applied statics. Contrary to dynamics, she studies the fixed body's balance conditions.

That's why this present document does one's utmost in optimization research of the Nubian vault's range with chain theory allowing for conditions lines states, to meet to inner efforts simulation problems in the vault. This simulation will serve to study nubian vault's structural design.

At the first time, it will be about to establish a chain formula using mathematics method and inertia center theorem applied to our system.

Then, thanks to the software Excel, a curve simulation for parameter « a » different values will be made. At last with funicular polygon layout, nubian vault curve will be achieved and the inner efforts will be determined.

The nubian vault simulation by finite elements with the software is the last step of the work . She shows to us with precision how much range crossing which is fixed by Nubian Vault Association(3.5m), is not detrimental to his stability for a chosen scholar case vault range 5.27m

**Key words:** Graphic statics, applied science, dynamic simulation, stability, structure, nubian vault, chain.

## LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS

### SYMBOLES

$\alpha$ : Angle

$ch$ : Cosinus hyperbolique

$y = ach \frac{x}{a}$  : équation de la chaînette

$x$ : Variable

$M_h$ : Masse totale humide

$M_{te}$ : Masse totale d'eau

$\gamma_{dmax}$ : Poids volumique sec maximal du matériau

$\gamma_n$ : Poids volumique du Néré

$\omega_{opt}$ : Teneur en eau optimale

$V$ : Volume de la briquette

$V_e$ : Volume d'eau

$M$ : La masse expérimentale du matériau en Banco

$R_t$ : Résistance mécanique à la traction

$R_c$ : Résistance mécanique à la compression

$\vec{T}$  : La tension à droite équilibrant le système au point A

$\overrightarrow{T + dT}$  : La tension à gauche équilibrant le système au point A

$\vec{P}$ : Poids de la briquette au point A

$\mu$ : Masse linéaire d'une brique au point A

$\vec{F}_i$ : Force non concourante au points i

$k$ : Constance

$sh$ : Sinus hyperbolique

$L$ : Longueur développée de la chaînette

$g$ : Force de pesanteur

$f(x)$ : Fonction de variable  $x$

$\infty$ : Infini

$\mathbb{R}$ : Ensemble des nombres réels

$S$ : Surbaissement de la voûte nubienne

$v$ : Volume

$\gamma$ : Poids volumique

$P_l$ : Poids linéaire

$P$ : Poids

$G_p$ : Charge propre

$v_r$ : Volume du remplage

$P_r$ : Poids du comble du remplage

$M_i$ : Moment des forces  $F_i$  par rapport à la section définie

$R_i$ : Résultante de deux forces non concourantes

$N_i$ : efforts internes de la voûte

$R_r$ : Réaction aux appuis du remplage

$Q$ : Charge appliquée sur la voûte

$\sigma_i$ : Contrainte normale

$e$ : Excentricité

$I_{Gx}$ : Moment d'inertie par rapport l'axe  $x - x$

$I_{Gy}$ : Moment d'inertie par rapport l'axe  $y - y$

$I_G$ : Moment d'inertie au point  $G$

$F_{lim}$ : Force de frottement limite

$F_{stab}$ : Forces stabilisantes

$F_{déséq}$ : Forces de renversement

$R_v$ : Composante verticale de la réaction d'appuis

$H$ : Composante horizontale de la réaction d'appuis

$\gamma_{transl}$ : Coefficient de sécurité de translation

$\gamma_{rot}$ : Coefficient de sécurité de rotation

$M_{stab}$ : Moments stabilisants

$M_{déséq}$ : Moments de renversement



## **ABREVIATIONS**

*COP21: Conferences of the parties 21<sup>ième</sup> édition*

*CAO: Conception Assistée par l'Ordination*

*DAO: Dessin Assistée par l'Ordinateur*

*UAC: Université d'Abomey Calavi*

*EPAC: Ecole Polytechnique d'Abomey Calavi*

*VAK: Vérechaguin Andrei Konstantinovich*

*AVN: Association Voûte Nubienne*

*CSB: Construction Sans Bois*

*UNESCO: Organisation des Nations Unies pour l'Education, la Science  
et la Culture*

*VSR : Voûte sans remplage*

*VAR : Voûte avec remplage*

*kN : Kilo newton*

*MPa : Méga pascal*

*Cm : centimètre*

*m : mètre*

## LISTE DES FIGURES

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 1: Courbe de la chaînette par le logiciel Encarta Maths .....               | 47 |
| Figure 2: Cinq courbes de la chaînette pour différente valeur de "a" .....         | 52 |
| Figure 3: Efforts internes dans la chaînette et la chaînette renversée .....       | 61 |
| Figure 4: Voûte expérimentale avec des boules par Poleni .....                     | 62 |
| Figure 5: Appareil de Léonard de Vinci pour calculer la poussée horizontale .....  | 67 |
| Figure 6: La ligne des pressions de Méry .....                                     | 68 |
| Figure 7: Exemple de la détermination de la ligne des pressions .....              | 69 |
| Figure 8 : Formation du petit triangle isocèle .....                               | 69 |
| Figure 9: Découpage en tranche de la voûte .....                                   | 70 |
| Figure 10: Formation du grand triangle .....                                       | 72 |
| Figure 11: Composition de la ligne des pressions.....                              | 73 |
| Figure 12: Renversement de la chaînette .....                                      | 74 |
| Figure 13: Numérotation des segments constituant la chaînette .....                | 74 |
| Figure 14: Détermination des efforts internes .....                                | 75 |
| Figure 15: Détail des réaction aux appuis de la voûte .....                        | 75 |
| Figure 16: Détermination des réaction aux appuis .....                             | 76 |
| Figure 17: Dimension des briquettes de la voûte .....                              | 77 |
| Figure 18: Compression d'un segment de la voûte .....                              | 77 |
| Figure 19: Schéma statique du mur porteur.....                                     | 78 |
| Figure 20: Section plane de du mur porteur dans le plan (xoy) .....                | 79 |
| Figure 21: Section plan du mur porteur dans le plan (yoz) .....                    | 80 |
| Figure 22: Mise en œuvre de la voûte montrant l'angle de pose des briquettes ..... | 96 |
| Figure 23: Appareillage du mur porteur.....                                        | 97 |

## LISTES DES IMAGES

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| Image 1: Démarrage de Robot .....                       | 102 |
| Image 2: Création du matériau Banco dans Robot .....    | 103 |
| Image 3: Etablissement des lignes de construction ..... | 104 |
| Image 4: Formation de l'arc .....                       | 104 |
| Image 5: Epaisseur de la voûte .....                    | 106 |
| Image 6: Définition du maillage .....                   | 106 |
| Image 7: Calcul de la voûte .....                       | 107 |
| Image 8: Voûte maillée .....                            | 107 |
| Image 9: Contrainte normale suivant l'axe x-x .....     | 108 |
| Image 10: Contrainte normale suivant l'axe y-y .....    | 109 |
| Image 11: Contrainte normale biaxiale .....             | 109 |
| Image 12: Efforts de membrane suivant l'axe x-x .....   | 109 |
| Image 13: Efforts de membrane suivant l'axe y-y .....   | 110 |
| Image 14: Efforts de membrane suivant l'axe x-y .....   | 110 |
| Image 15: Moments fléchissant x-x .....                 | 111 |
| Image 16: Moments fléchissant y-y .....                 | 111 |
| Image 17: Moments fléchissant x-y .....                 | 112 |
| Image 18: Contrainte de cisaillement x-x .....          | 112 |
| Image 19: Contrainte de cisaillement y-y .....          | 113 |
| Image 20: Effort tranchants .....                       | 113 |
| Image 21: Efforts tranchants y-y .....                  | 114 |
| Image 22: Déplacement suivant l'axe x-x .....           | 114 |
| Image 23: Déplacement suivant l'axe y-y .....           | 115 |
| Image 24: Déplacement suivant l'axe z-z .....           | 115 |
| Image 25: Rotation autour de l'axe x-x .....            | 116 |
| Image 26: Rotation autour de l'axe y-y .....            | 116 |
| Image 27: Déformation de la voûte .....                 | 117 |



## LISTE DES TABLEAUX

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| Tableau 1: Dosage pour la formulation d'une brique                   | 44  |
| Tableau 2: Tableau des valeurs de la chaîne renversée pour "a"=-3    | 57  |
| Tableau 3: Tableau des valeurs de la chaîne renversée pour "a"=-2    | 58  |
| Tableau 4: Tableau des valeurs de la chaîne renversée pour "a"=-1    | 60  |
| Tableau 5: Valeur des efforts internes de la voûte sous poids propre | 75  |
| Tableau 6: Caractéristiques physico-mécaniques du Banco              | 100 |
| Tableau 7: Récapitulation 1                                          | 118 |
| Tableau 8: Récapitulation 2                                          | 119 |
| Tableau 9: Récapitulation 3                                          | 119 |

## INTRODUCTION GENERALE

La sauvegarde de la planète terre contre les conséquences néfastes qu'engendre la fragilisation de la couche d'ozone : le réchauffement planétaire, l'augmentation du niveau de la mer, les perturbations climatiques, la fonte des calottes glaciales du Pôle, l'inondation des champs agricoles, sont tant de problèmes sur l'échiquier mondiale ayant suscité l'adoption de nouvelles dispositions à la 21<sup>ème</sup> édition de la Conférence Des Partie, pour réduire l'émission de gaz à effet de serre.

Dans le domaine de génie civil il était nécessaire, l'adoption de nouvelles technologies de construction favorable à cette décision. C'est ainsi qu'il a été découvert une vieille technique de construction des habitations : la construction en terre argileuse avec une coiffe est en voûte, dont ici le cas de la voûte nubienne fait l'objet de la présente étude. Les techniques de voûte nubienne sont d'usage dans les pays sahéliens et s'affirme comme l'un des meilleurs moyens parmi tant d'autres, susceptible de freiner la destruction de la couche protectrice de la terre.

Afin de mieux comprendre cette technique et l'adapter au mieux à nos besoins, de multiples recherches ont été entamées sur la Voûte Nubienne. La présente étude, qui porte sur : **« l'optimisation de la portée d'une voûte nubienne toujours avec la théorie de la chaînette renversée, en tenant compte des conditions aux états limites »**, veut répondre au problème d'espace de franchissement de la voûte nubienne pour le confort des personnes et des biens.

|  |
|--|
|  |
|--|

## **CHAPITRE 1 : METHODOLOGIE DE RECHERCHE ET GENERALITE SUR LA VOÛTE NUBIENNE**

### **I- METHODOLOGIE DE RECHERCHE ET HYPOTHESES DE CALCUL**

#### **1.1 Démarche méthodologique de l'étude**

Dans le cadre de cette étude, nous avons fait sans un premier temps, la revue bibliographique des travaux déjà réalisés sur la voûte nubienne et la théorie de la chaînette renversée, puis grâce aux logiciels Encarta Maths, Archicad, Excel et Robot Structural Analysis nous avons procédé à la modélisation et à la simulation de la voûte nubienne pour différente portée, dans le but de rechercher les paramètres d'optimisation de sa portée. Enfin nous avons pris une étude de cas pour étayer nos différentes affirmations.

#### **❖ JUSTIFICATION ET OBJECTIFS DE L'ETUDE**

Il est abordé dans ce premier point le contexte dans lequel cette étude a été suscitée, en passant par la justification de l'étude qui conduira aux objectifs de l'étude.

#### **❖ GENERALITE SUR LA TECHNIQUE DE LA VOÛTE NUBIENNE**

Il sera question à ce niveau, de faire brièvement l'historique de la voûte nubienne et de voir son évolution dans le temps. Ensuite il sera rapporté quelques études préalables effectuées sur la voûte nubienne.

#### **❖ L'ALLURE IDEALE DE LA VOÛTE NUBIENNE**

Cette rubrique sera consacrée exclusivement à l'élaboration de l'écriture mathématique de l'allure de la voûte ici assimilable à la théorie de la chaînette.

❖ **ETUDE DE STABILITE DE LA VOUTE NUBIENNE**

La sécurité des personnes et des biens abrités par les constructions en génie civil en général et en voûte nubienne en particulier passe par l'équilibre statique et l'équilibre aux limites de ladite structure. C'est l'objet dont traitera ce présent chapitre.

❖ **SIMULATION DU MODE DE TRANSMISSION DANS LA VOÛTE NUBIENNE.**

Ici il sera déterminé la ligne des pressions de la voûte nubienne par la méthode graphique et ensuite on passera à la modélisation de la voûte avec le logiciel Robot.

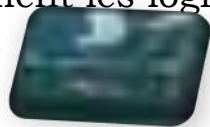
❖ **ANALYSE DES RESULTATS ET INTERPRETATIONS**

Dans cette dernière phase, il sera abordé l'analyse des résultats obtenus plus haut, suivi de l'interprétation qui nous permettrons de déboucher sur de nouvelles perspectives d'investigations relatives à la voûte nubienne.

## **1.2 Matériels de l'étude et hypothèses de calcul**

Les matériels qui nous ont permis de mener à bien cette recherche sont essentiellement les logiciels comme :

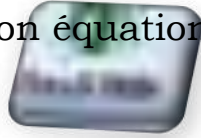
❖ **Encarta Maths**



Microsoft Encarta Maths est une palette d'outils conçus pour aider à comprendre les mathématiques et à faire les devoirs mathématiques. Cette palette comprend notamment une calculatrice scientifique multifonctions,

aux possibilités graphiques et de résolution d'équations étendues. Dans le cas de la présente étude, ce logiciel nous a permis de représenter la courbe de la chaînette une fois que nous avons élaboré son équation.

❖ Le programme Excel



Connu comme programme de calcul tabulaire, grâce auquel, nous avons pu obtenir également la même courbe de la chaînette et en même temps tracé celle de la chaînette renversée.

❖ ARCHICAD



ArchiCAD est une application de modélisation qui permet aux architectes de dessiner des bâtiments de manière productive en se fondant sur le concept du Virtual Building™ (Bâtiment numérique).

Ce programme nous a permis de modéliser la ligne des pressions de la voûte et de déterminer graphiquement les efforts internes dans la paroi de la voûte et en même temps les réactions d'appuis.

❖ Robot Structural Analysis



Le système ROBOT est un progiciel CAO/DAO destiné à modéliser, analyser et dimensionner les différents types de structures. ROBOT permet de créer les structures, les calculer, vérifier les résultats obtenus, dimensionner les éléments spécifiques de la structure ; la dernière étape gérée par ROBOT est la création de la documentation pour la structure calculée et dimensionnée.

Avec robot, nous avons modéliser et dimensionner la voûte nubienne en tenant compte des considérations qui

seront définies dans la suite de l'étude. Pour cette modélisation nous avons utilisé l'élément coque.

Pour toute l'étude, nous supposons les assertions suivantes :

- ✓ L'allure idéale de la voûte nubienne suit la courbure décrite par la chaînette renversée.
- ✓ L'optimisation de la portée de cette courbe reste tributaire du paramètre "a" et de la flèche.
- ✓ La courbure de la chaînette est une succession de segments assemblées.
- ✓ La poussée horizontale est diminuée grâce au comble du remplage.
- ✓ La pose des briquettes dans la mise en œuvre de la voûte nubienne, suit une inclinaison d'angle  $\alpha$ , par rapport à l'horizontale qui assure le rôle du coffrage de la voûte nubienne.
- ✓ L'homogénéité entre les briquettes et le mortier d'assemblage.

Cependant, au niveau de la modélisation avec le logiciel robot, nous allons supposer que la paroi de la voûte nubienne soit uniforme et homogène bien qu'en réalité elle soit composée d'éléments (briquettes) assemblés avec du mortier afin de connaître la contrainte maximale induite dans la voûte nubienne.

## **II- JUSTIFICATION ET OBJECTIFS DE L'ETUDE**

### **2.1. Contexte et justification de l'étude**

La construction des habitations en milieu rurale au Bénin et dans la plupart des pays de la sous-région, est réalisée en matériaux locaux. Les techniques utilisées pour ces types d'habitations en banco sont multiples et variées : le pisé, le torchis, la bauge, la brique de terre compressée et la voûte nubienne. Une étude approfondie aussi bien sur les matériaux et la technique utilisée, serait positive à une bonne maîtrise des ouvrages et édifices construites en terre.

Depuis quelques années, une nouvelle technique de construction, la voûte nubienne, est observée au Burkina Faso et au Sénégal. La particularité de cette technique réside dans le fait que sa construction se réalise sans coffrage et sans armature.

Beaucoup d'ingénieurs et de spécialistes se sont penchés sur la question en menant des recherches pour comprendre le mode de fonctionnement de la voûte nubienne, c'est le cas du « Projet de semestre voûte nubienne au Burkina Faso » élaboré par le collègue des ingénieurs Christelle COCCO, Raphaël DAUPHIN et Karim GANOUR, au bénéfice de l'Association Voûte Nubienne.

Au Bénin, des études similaires ont été amorcées toujours sur la technique de la voûte nubienne au laboratoire de génie civil de l'UAC ; c'est le cas de la « Modélisation et simulation par éléments finis de la paroi d'une toiture en voûte nubienne sans coffrage ni armatures », réalisé par Florent Aquilas PADONO, étudiant de Véréchaguine.

La voûte nubienne est la paroi d'une toiture en voûte dont le mode de transmission des charges se fait par compression. Les recherches déjà réalisées ont permis d'établir la condition nécessaire pour l'obtention d'une flèche maximale.

Cependant elle n'a pas encore été poussée dans l'option de l'optimisation de la portée franchie par les voûtes nubiennes.

La présente étude se propose de déterminer la portée maximale que peut couvrir la voûte nubienne, sans une modification du mode de transmission des charges qui lui est propre.

## **2.2. Objectif général**

La présente étude s'inscrit dans la chaîne des travaux de recherche entamés sur l'étude architecturale et structurale de la voûte nubienne. Son objectif général est de rechercher les paramètres d'optimisation de la portée de la voûte nubienne afin qu'elle franchisse de grand espace pour le confort des personnes et des biens.

Pour parvenir à cette finalité, nous nous sommes définis trois objectifs spécifiques.

### **2.1.1 Objectifs spécifiques**

Les objectifs spécifiques s'énumèrent comme suit :

- a) Vérifier que l'allure idéale de la voûte nubienne est assimilable à celle de la chaînette renversée.
- b) Optimiser la portée de la voûte nubienne en jouant sur les deux paramètres clés, la flèche de la voûte et la valeur de "a" tel que :

$$y = ach \frac{x}{a}$$

- c) Vérifier la stabilité de la structure en voûte nubienne.

### **2.1.2 Les résultats attendus**

A l'issu de la présente étude qui vise fondamentalement à déterminer la possibilité d'optimisation de la portée de la voûte nubienne, nous en viendrons à :

- a) La confirmation que la théorie de la chaînette offrirait l'allure idéale pour que la voûte nubienne fonctionne de manière optimale à la compression.
- b) Franchir de grande portée au besoin grâce au choix qui serait porté soit sur la flèche, soit sur le paramètre "a".
- c) Déduire l'importance de l'inclinaison des briquettes.
- d) La vérification de l'équilibre statique de la structure en voûte nubienne.
- e) L'effectivité de la rigidification de la voûte nubienne grâce au comble du remplage.

### **III- SYNTHESE SUR LA TECHNIQUE DE LA VOÛTE NUBIENNE**

#### **3.1 Origine et historique de la voûte nubienne**

L'épanouissement de l'homme dépend beaucoup plus des facteurs intrinsèques à son environnement et à son cadre de vie. l'un des premiers besoins de l'homme est de se procurer un local qui lui servira d'abri, et par ricochet participera à la protection de ses biens matériels faces aux intempéries. C'est ainsi que nos premiers ancêtres s'abritèrent dans les rochers, les cavernes au niveau des zones montagneuses, et dans les forêts, en se servant des branches et des feuilles des arbres. Très tôt, ils sentiront leur vie menacée par la présence d'autres espèces animales avec lesquels ils cohabitaient.

Il était nécessaire que l'homme se trouve un espace plus viable et qui le maintienne en sécurité, lui avec leur bien. C'est alors que l'histoire de l'humanité entière a connu la construction des habitations en terre battue. Avec le temps, plusieurs techniques de construction, ont connu le jour parmi lesquelles la construction en voûte nubienne vient retenir particulièrement notre attention.

L'origine de la construction en voûte remonte à la période antique. On remarque leur usance de manière prolifique dans les régions du Moyen-Orient, romaines, byzantines, égyptiennes et européennes.

Tenant son nom de son pays d'origine la Nubie, une région au Sud de l'Égypte, la voûte nubienne est faite de briques en terre

pétrie mélangée avec de la matière organique : fibres végétales et celluloses. La preuve de l'antiquité de cette technique nous vient de la région sud de l'Égypte où les magasins du Ramesseum au Louxor qui ont été construits avec la même technique, datent de 3500 ans a. JC, attestant ainsi de la durabilité de telle construction.

Sa mise en œuvre, qui peut paraître un peu complexe du fait qu'elle se réalise sans coffrage, s'avère néanmoins simple tant que la technique de sa mise en œuvre est respectée ; et est accessible à tous. La construction avec la technique de la voûte nubienne a connu une trêve pendant des lustres, et ce n'est qu'en 1940 qu'elle sera reprise et remise sur tapis par l'architecte égyptien Hassan Fathy. Ce dernier grâce à sa perspicacité et des arguments indéniables, est parvenu à convaincre une grande majorité des hommes de sa région car jugeait-il : cette architecture traditionnelle est au service des couches sociales défavorisées qui n'ont pas les moyens de s'offrir le luxe de construire modernes. Plusieurs édifices en voûte nubienne ont émergé c'est le cas : des mosquées, marchés, théâtres et habitations en terre crue toujours avec la technique traditionnelle. Cependant la politique de la promotion de technique ancestrale revue et améliorée par l'architecte Hassan Fathy fût abandonnée de nouveau au détriment toujours de nouvelle technique de construction donnant la possibilité de l'érection des édifices de grandes envergures.

Si tant est-il que la précarité de la vie est un facteur clé qui a d'incidence directe sur le mode de vie et les types de constructions que nous rencontrons dans les milieux ruraux, à défaut de

rechercher des fonds pour adopter des constructions modernes, une étude approfondie des techniques antiques utilisées pour exécuter les habitats en banco serait une meilleure solution. C'est donc dans cet optique, qu'un demi-siècle plus tard, Thomas Granier (maçon de formation) et Série Youlou (agriculteur burkinabé) vont revenir sur l'idée de Hassan, par la création de la fondation : « Association Voûte Nubienne », dans le but de créer non seulement une plateforme de la vulgarisation de cette technique de construction pour répondre à la problématique de construction dans les pays sahéliens mais aussi et surtout de former les artisans à cette technique de construction.

De sa création à nos jours, plus de 1000 bâtiments de diverses destinations : habitations, mosquées, églises, marchés, écoles, ont été construite en matériaux locaux avec la technique de la voûte nubienne, dans les pays sahéliens.

### **3.2 Revue bibliographie sur la voûte nubienne**

Beaucoup de travaux ont précédé la présente recherche et touche plusieurs aspects de l'étude technique et mécanique des voûtes en général et de la voûte nubienne en particulier. Nous devons une énorme documentation sur la voûte nubienne grâce au travail acharné et à la détermination de l'AVN, et également aux travaux des étudiants de l'EPAC et de VAK.

#### **❖ DOCUMENT DE REFERENCE DE LA CSB**

La Construction Sans Bois est une organisation qui propose des techniques de construction près que rudimentaire pour la réalisation des édifices à moyenne

échelle dont le coût d'exécution est moindre et de bonne qualité, visant à offrir un cadre de vie plus décent pour la basse classe de la société africaine.

Dans le document de référence de la CSB sont consignés sommairement les caractéristiques technico-mécaniques de briquettes en banco qui serviront dans la mise en œuvre de construction avec les dispositions constructives et de contrôle pour une réalisation de qualité et de sécurité.

#### ❖ BUILDING WITH ARCHES, VAULTS AND DOMES

Ce document publié par la Chaire de l'UNESCO, fait la synthèse sur l'historique de la typologie des techniques de construction traditionnelle en forme d'arc, de voûte et de dôme en présentant les dispositions constructives qui permettaient d'assurer leurs stabilités.

#### ❖ MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DE LA PAROI D'UNE TOITURE EN VOUTE NUBIENNE SANS COFFRAGE NI ARMATURE.

Dans ce rapport l'ingénieur Aquilas PADONOU dans sa modélisation, est parvenu à démontrer que sous sa forme idéale, la voûte nubienne travaille en compression simple et suivant la technique de mise en œuvre, il a prouvé que la portée « maximale » proposée par l'AVN suivant la hauteur choisie, respectait la courbe de la chaînette renversée.

#### ❖ ETUDE SUR LA STABILITE DES ARCS ET DES VOUTES

Ce document a servi de support pour la soutenance de la thèse doctorale en sciences appliquées présentée par le Professeur Pierre Smars à l'Université Catholique de LEUVEN. Là, une confrontation des méthodes d'analyse limite aux voûtes gothiques en Brabant, a été étudié. Il en ressortait de cette étude que les méthodes antiques de calcul de la stabilité des arcs et des voûtes, ne tenaient pas compte de la résistance aux cisaillements des matériaux qui naissent dans la mise en service desdites structures.

❖ **LES ETUDES AFFERENTES A LA TERRE DE BARRE, LE BANCO**

Les études de reconnaissance physico-chimique et mécanique sur le Banco ont fait office des travaux de recherche pour l'obtention du diplôme d'ingénieur en génie civil par des étudiants de l'EPAC. Les résultats de ces études fournissent les renseignements sur le comportement mécanique et l'amélioration possible de la résistance à la compression et la traction du banco. Il s'agit des ingénieurs Ambarka et Mariette.

### **3.3 Caractéristiques physico-mécaniques des matériaux**

La voûte nubienne est une vieille technique de construire de la coiffe des bâtiments en terre battue dont la mise en œuvre se réalise sans coffrage. Dans le cadre d'une bonne appréhension de la technique, des études ont été entamées sur le mode de transmission des charges par la Voûte nubienne et les

caractéristiques physico-mécaniques de l'adobe qui entrera dans la mise en œuvre de la voûte nubienne.

### **3.3.1 La terre de barre**

La terre de barre est issue de la formation géologique de roches meubles, de couleur rougeâtre virant au brun constituant une pâte collante. Suivant la répartition géographique, on rencontre la terre de barre au niveau de six plateaux au Sud du Bénin et en grande proportion vers de Nord Bénin.

Selon la description faites par Williame et Volkoff en 1966 au Bénin, la composition physique et chimique de la terre de barre se présente comme suit :

- ✓ 15,30 % d'Argile
- ✓ 5,40 % de Limon
- ✓ 77,30 % sable
- ✓ 0,05 % d'Azote totale
- ✓ 2,64 % de matière organique.

### **3.3.2 Les celluloses utilisées**

#### ➤ La paille de riz

La paille utilisé dans la formulation du banco sont des tiges du riz séchée et découpé avec une longueur moyenne de 5 cm. La présence des pailles du riz dans le banco renforce sa résistance à la traction.

#### ➤ L'infusion de néré

C'est une substance obtenue par infusion des graines de Néré dont le nom scientifique est "Parkia Biglobosa" lors de la préparation de la moutarde. Les récentes études de Ambarka ont prouvé que l'utilisation de l'infusion dans la formulation de la briquette en banco participe dans la résistance à la compression de celle-ci.

### 3.3.3 La formulation pour une briquette en banco

Dans le cadre des études effectués sur les caractéristiques physico-mécaniques du matériau banco par AMBARKA, nous retenons pour la formulation d'une briquette :

- Paille :  $M_{paille} = 1,5 \%$  de la masse de la terre de barre
- Terre de barre :  $\gamma_{dmax} = 1,86 \text{ g/cm}^3$  et  $\omega_{opt} = 12,5 \%$
- Infusion de Néré :  $\gamma_n = 1,05 \text{ g/cm}^3$

Pour une briquette prismatique de volume  $V$ , déterminons la quantité de chaque matériau.

❖ La masse totale humide d'une briquette :  $M_h$

$$M_h = \frac{(100 + \omega_{opt})}{100} \times \gamma_{dmax} \times V$$

$$M_h = \frac{(100 + 12,5)}{100} \times 1,86 \times V$$

$$M_h = 2,093V$$

❖ La masse totale d'eau :  $M_{te}$

$$M_{te} = M_h - \gamma_{dmax} \times V$$

$$M_{te} = (2,093 - 1,86)V$$

$$M_{te} = 0,233V$$

❖ Soit  $M$ , la masse de la terre de barre sec et  $M_e$ , la masse d'eau de gâchage, on a :

$$\begin{cases} M + 0,02M + 0,06M + M_e = M_h \\ V_e + M_e = M_{te} \end{cases}$$

Avec

$$V_e = \frac{0,06M}{\gamma_n}, \text{ soit } V_e = 0,057 M,$$

$$\begin{cases} 1,08M + M_e = M_h \\ 0,057M + M_e = M_{te} \end{cases}$$

Il en découle que :

$$\begin{cases} M = \frac{M_h - M_{te}}{1,08 - 0,057} = 1,818V \\ M_e = M_{te} - 0,057M = 0,129V \end{cases}$$

✓ La masse de l'infusion de Néré est :

$$M_{inf} = 0,06M = 0,109V$$

✓ La masse de paille de riz est :

$$M_{paille} = 0,02M = 0,036V$$

Les briquettes en banco utilisé sont de dimensions variées selon sa destination :

- Pour les murs porteurs : 40X20X10
- Pour la voûte nubienne : 24X12X4

Ainsi la formulation des briquettes se récapitule comme suit :

*Tableau 1: Dosage pour la formulation d'une brique*

| Quantités (en g) par unité de brique | Brique des murs<br>(40X20X10) | Brique de la voûte<br>(24X12X4) |
|--------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| Paille de riz                        | 288                           | 41,472                          |
| Terre de barre                       | 14 544                        | 2 094,336                       |
| Infusion de Néré                     | 872                           | 125,568                         |
| Eau de gâchage                       | 1 024                         | 147,456                         |

La résistance mécanique à la traction et à la compression à la presse respectivement par flexion et par poinçonnement à la presse, donne :  $R_t = 0,619 \text{ MPa}$  et  $R_c = 3,34 \text{ MPa}$

## **CHAPITRE 2 : OPTIMISATION DE LA PORTEE DE LA VOÛTE NUBIENNE**

### **I- L'ALLURE IDEALE DE LA VOÛTE NUBIENNE**

#### **1.1. La théorie de la chaînette**

La courbe décrite par un collier ou une corde pesant (e) sous son propre poids, et tendu (e) entre ses deux extrémités, est à base de la théorie de la chaînette. La chaînette est un ensemble de maillons articulés entre eux et de ce fait tout autre sollicitation à part celle de la traction, s'avère impossible.

Ainsi une chaînette suspendue entre deux points reste tendue. Pour l'élaboration d'une formule mathématique de la fonction représentative de la courbe d'une chaînette, plusieurs hypothèses sont établies afin de traduire fidèlement le comportement mécanique des chaînettes.

##### **1.1.1. Hypothèses sur la courbe de la chaînette**

Les hypothèses d'établissement de la courbe induite par une chaînette suspendue entre deux points, s'énoncent comme suit :

- ✓ La définition de la courbe comme celle d'un objet suppose que le câble, la corde ou la chaîne n'exerce aucune force élastique de flexion (ni de friction aux surfaces transversales de contacts des mailles de la chaînette) et donc que la seule force en jeu est la force de gravitation exercée de façon uniforme sur toute la longueur. Cette définition suppose aussi que la longueur totale du câble, ou de n'importe quelle section de

celui-ci, reste invariable lorsque s'exercent des forces de traction longitudinales. C'est à dire donc que le câble ne subit aucune élongation élastique à cause de cette traction, le cas idéal n'étant alors pas celui de la cordelette, mais plutôt celui d'une très fine chaînette à maillons indéformables, chacun d'eux étant très court en comparaison de la longueur totale de la chaînette.

- ✓ Pour que la force de gravitation soit uniforme, on admet que toutes les sections de même longueur du câble ou de la corde sont de même poids, quelle que soit cette longueur de section. Rapporté au cas de la chaînette idéale, les maillons élémentaires sont tous de forme et de taille identiques, mais aussi de masses identiques donc faits d'un matériau solide dont la masse volumique est homogène. D'autre part on doit aussi admettre que les forces de gravitation exercées sur chacune de ces sections sont égales et ne dépendent donc pas de la position des sections, ce qui n'est possible que si la distance entre leur centre de gravité et le centre de gravité de la Terre est pratiquement identique entre deux sections quelconques, et donc que la longueur totale du câble est négligeable par rapport à la distance entre le milieu du câble et le centre de la Terre, de sorte que le module et la direction du champ de gravité terrestre sont alors pratiquement constants sur toute la longueur du câble ou de la chaînette idéale.
- ✓ Enfin, on suppose que quelle que soit la forme de la chaînette, celle-ci reste confinée sur toute sa longueur dans le plan formé par la position de ses extrémités et la direction

constante du champ gravitationnel : toutes les forces d'action ou de réaction s'exercent alors dans ce plan sans qu'intervienne aucune force de torsion supplémentaire ou que les forces d'action exercées hors de ce plan sur toute section de la chaînette sont partout et constamment équilibrées par la réaction des forces de torsion égales en module et opposées en direction aux forces d'action, de sorte que les éventuelles forces de torsion, élastiques ou non, n'entrent pas en jeu dans la forme obtenue de la chaînette dans ce plan : ce cas s'applique aux fils, cordes et câbles, formés de torons soumis en interne à de telles forces de torsion maintenue en équilibre par des contre-torsions.

### 1.1.2. Expression mathématique de la courbe d'une chaînette

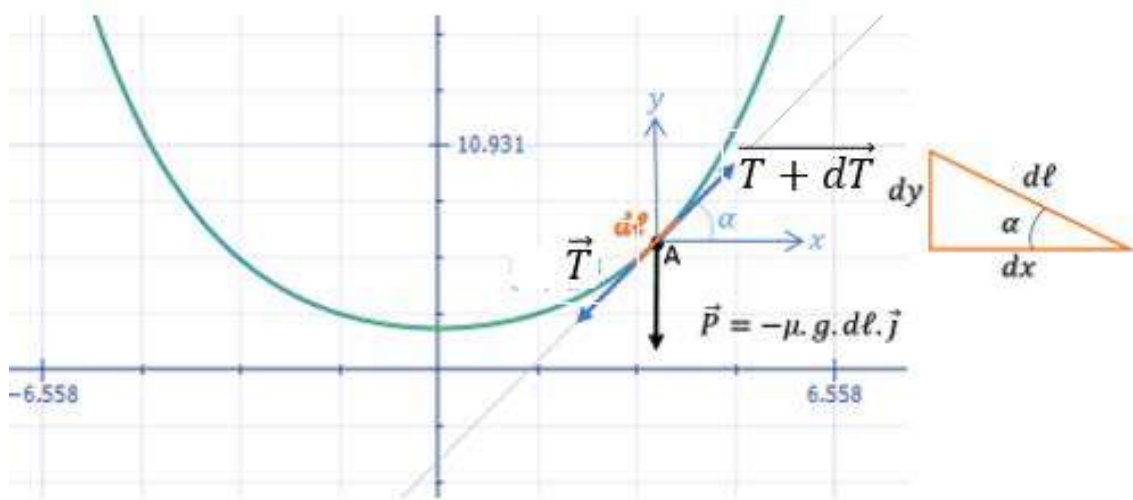


Figure 1: Courbe de la chaînette par le logiciel Encarta Maths

Soit un point A de notre courbe

$\vec{P}$  : le poids propre de la chaînette au point A

$\vec{T}$  : la tension à droite équilibrant le système au point A

$\overrightarrow{T + dT}$  : la tension à gauche équilibrant le système au point A.

Au repos du système, la somme vectorielle des forces appliquées au point A, donne un vecteur nul, on a :

$$\sum_{i=0}^3 \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{T + dT} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \quad [E_2]$$

La projection suivant les axes de notre repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ , conduit à :

$$\begin{cases} (T + dT)\cos\alpha - T\cos\alpha = 0 \\ (T + dT)\sin\alpha - T\sin\alpha - p = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T + dT - T)\cos\alpha = 0 \\ (dT)\sin\alpha = P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha)dT = 0 \\ \sin(\alpha)dT = \mu g d\ell \end{cases}$$

Par intégration on a :

$$\begin{cases} T\cos\alpha = k & \textcircled{1} \\ T\sin\alpha = \mu g L & \textcircled{2} \end{cases}$$

En divisant  $\textcircled{2}$  par  $\textcircled{1}$ , on obtient :

$$\tan\alpha = \frac{\mu g L}{k}$$

Or

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

Donc

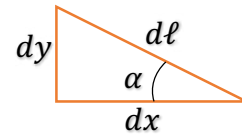
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu g}{k} L$$

En dérivant une première fois chaque membre de cette égalité, on obtient :

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\mu g}{k} d\ell$$

Or

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



Il s'ensuit que :

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\mu g}{k} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\mu g}{k} \sqrt{(dx)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\mu g}{k} \left\{ \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} \right\} dx$$

Posons :

$$u = \frac{dy}{dx}$$

On a :

$$du = \frac{\mu g}{k} \left( \sqrt{1 + u^2} \right) dx$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\mu g}{k} dx$$

A présent, posons :

$$u = sh(x)$$

On a :

$$du = ch(x) dx$$

Il en découle de ce qui précède, que :

$$\frac{ch(x)}{\sqrt{1 + [sh(x)]^2}} dx = \frac{\mu g}{k} dx$$

Par suite,

$$\int \frac{ch(x)}{\sqrt{1 + [sh(x)]^2}} dx = \int \frac{\mu g}{k} dx$$

Or

$$1 + [sh(x)]^2 = [ch(x)]^2$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{ch(x)}{\sqrt{1 + [sh(x)]^2}} dx &= \int \frac{\mu g}{k} dx \Leftrightarrow \int \frac{ch(x)}{ch(x)} dx = \int \frac{\mu g}{k} dx \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\mu g}{k} x \end{aligned}$$

Or

$$u = sh(x) \Rightarrow x = arsinh(u)$$

En transformant que le premier membre de l'égalité précédente, on revient à :

$$\operatorname{arcsch}(u) = \frac{\mu g}{k} x \Leftrightarrow u = \operatorname{sh}\left(\frac{\mu g}{k} x\right)$$

De plus

$$u = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh}\left(\frac{\mu g}{k} x\right)$$

$$dy = \left[ \operatorname{sh}\left(\frac{\mu g}{k} x\right) \right] dx \Rightarrow y = \left(\frac{k}{\mu g}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\mu g}{k} x\right)$$

D'où l'équation de la courbe décrite par une chaînette suspendue en ses deux extrémités est la suivante :

$$\begin{cases} y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right) \\ a = \frac{k}{\mu g}, \quad \text{avec } k = T \cos \alpha \end{cases}$$

Où "a" est un paramètre réel

Pour différente valeur de "a", nous avons les courbes suivantes grâce au logiciel Encarta Maths :

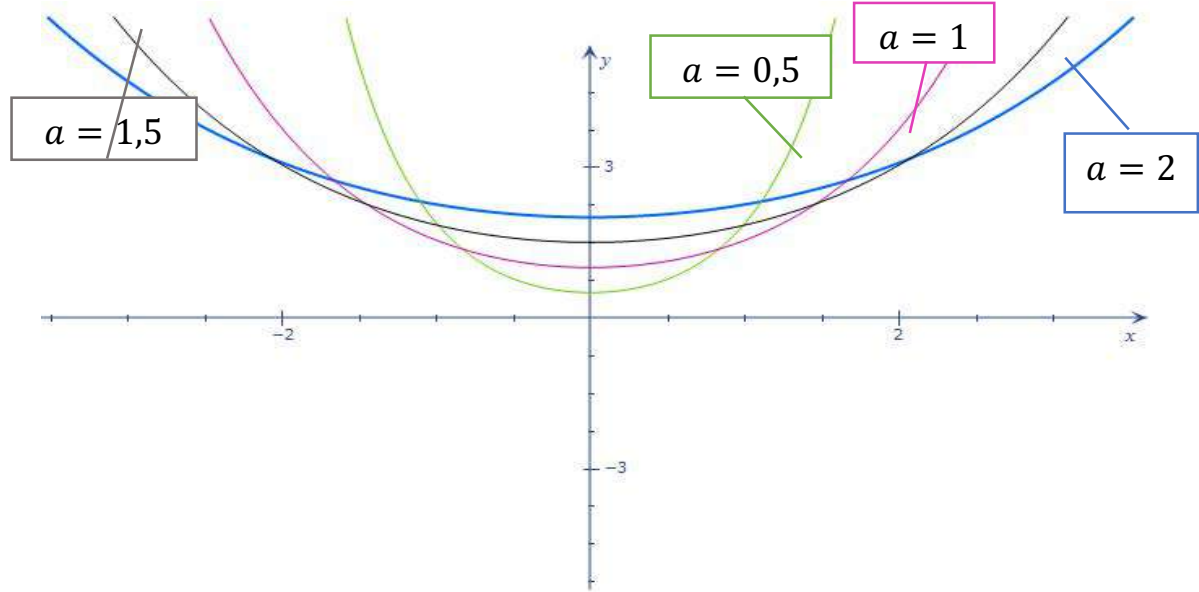


Figure 2: Cinq courbes de la chaînette pour différente valeur de "a"

## 1.2. Détermination de la portée maximale d'une chaînette

### 1.2.2. La longueur développée de la chaînette

Comme nous venons de le démontrer précédemment, il est ressorti que :

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$d\ell = (\sqrt{1 + u^2})dx, \text{ où } u = \frac{dy}{dx}$$

Or  $u = sh\left(\frac{\mu g}{k}x\right)$

$$L = 2 \int_0^{x_0} \left\{ \sqrt{1 + \left[ sh\left(\frac{\mu g}{k}x\right) \right]^2} \right\} dx$$

$$L = 2 \int_0^{x_0} ch\left(\frac{\mu g}{k}x\right) dx$$

$$L = 2 \frac{k}{\mu g} sh\left(\frac{\mu g}{k}x_0\right)$$

### 1.2.3. La flèche de la chaînette

Soit  $h$  la flèche et  $L$  la longueur développée de la chaînette.

$$\begin{cases} L = 2 \frac{k}{\mu g} sh\left(\frac{\mu g}{k} x_0\right) \\ h = \frac{k}{\mu g} ch\left(\frac{\mu g}{k} x_0\right) - \frac{k}{\mu g} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\mu g L}{2k}\right)^2 = \left[sh\left(\frac{\mu g}{k} x_0\right)\right]^2 \\ \left(\frac{\mu g h}{k} + 1\right)^2 = \left[ch\left(\frac{\mu g}{k} x_0\right)\right]^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\mu g h}{k} + 1\right)^2 - \left(\frac{\mu g L}{2k}\right)^2 = \left[ch\left(\frac{\mu g}{k} x_0\right)\right]^2 - \left[sh\left(\frac{\mu g}{k} x_0\right)\right]^2$$

Or,

$$[ch(t)]^2 - [sh(t)]^2 = 1$$

Donc

$$\left(\frac{\mu g h}{k} + 1\right)^2 - \left(\frac{\mu g L}{2k}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\mu g h}{k}\right)^2 + 2 \frac{\mu g h}{k} + 1 - \left(\frac{\mu g L}{2k}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\mu g}{k}\right)^2 \left(h^2 - \frac{L^2}{4}\right) + 2 \frac{\mu g h}{k} = 0$$

$$\left(h^2 - \frac{L^2}{4}\right) = -\frac{2k}{\mu g} h$$

$$\left(\frac{L^2}{4h} - h\right) = \frac{2k}{\mu g}$$

La portée de la chaînette est tributaire de la flèche. La flèche est à son tour dépendante de la valeur du paramètre  $a$  (telle qu'elle est montrée sur le figure 2 de la courbe idéale d'une chaînette). Pour l'optimisation de la portée de celle-ci, nous allons jouer plus sur le paramètre " $a$ ".

Dans notre cas de figure, le choix a été porté sur la courbe dont le paramètre «  $a = 2$  ». Aussi est-il évident de remarquer que moins importante est la tension dans la chaînette, plus petite est la portée de recouvrement de la celle-ci ; ce qui expose notre chaînette à avoir une grande flèche. Nous admettons que la flèche et le paramètre «  $a$  » s'influence réciproquement d'une certaine manière. Et le choix de la valeur du paramètre «  $a$  » reste arbitraire donc lié à la flèche de l'ouvrage.

Il découle de ce qui précède que nous ne pouvons pas nous attendre à déterminer une portée maximale pour notre chaînette, que si nous ne fixons pas d'avance sa flèche.

En fixant «  $a$  », nous nous sommes proposés de rechercher les portées envisageables de notre chaînette surtout au niveau du sous chapitre : le tracé de la courbe de la chaînette renversée au moyen du programme Excel.

Cependant, ici nous avons déterminé la portée de la chaînette pour une flèche  $h = 2 \text{ m}$  :

✓ La longueur de l'arc :  $L$

$$\left(h^2 - \frac{L^2}{4}\right) = -\frac{2k}{\mu g}h \Rightarrow L = \sqrt{4\left(h^2 + \frac{2k}{\mu g}h\right)}$$

$$L = \sqrt{4((2)^2 + 2 \times 2 \times 2)} , \text{ car } a = \frac{k}{\mu g} = 2$$

$$L = 6,928 \text{ m}$$

✓ La demie portée

$$L = 2 \frac{k}{\mu g} sh\left(\frac{\mu g}{k} x_0\right)$$

$$sh\left(\frac{\mu g}{k} x_0\right) = \frac{\mu g L}{2k}$$

$$\frac{\mu g}{k} x_0 = \operatorname{arcsch}\left(\frac{\mu g L}{2k}\right)$$

$$x_0 = \frac{k}{\mu g} \operatorname{arcsch}\left(\frac{\mu g L}{2k}\right)$$

$$x_0 = 2 \operatorname{arcsch}\left(\frac{6,928}{4}\right)$$

$$x_0 = 2,634 \text{ m}$$

Pour  $a = 2$ , et  $h = 2 \text{ m}$ , la portée totale couverte par la chaînette revient à  $5,268 \text{ m}$

### 1.3. Modélisation de la Voûte Nubienne

La modélisation est l'ensemble des choix qu'il faut opérer pour transformer une structure réelle en un modèle de calcul, connu de l'analyse des structures et reproduisant au mieux le comportement réel.

### 1.3.1. La parité de la fonction cosinus hyperbolique

Du point de vue mathématique, nous avons deux écritures de la fonction cosinus hyperbolique : une plus simplifiée, exprimée par le symbole mathématique «  $\text{ch}(x)$  » et l'autre, plus élaborée, exprimée en fonction de la fonction exponentielle

$$\text{« } [(e^x + e^{-x}) / 2] \text{ »}$$

Il s'en suit dans le cas présent de la chaînette que nous ayons comme formule mathématique l'expression :

$$f(x) = \left(\frac{a}{2}\right) \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$$

La fonction  $f$  est définie sur son domaine de définition  $\mathbb{R}$  ; et quelques soient  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(-x) \in \mathbb{R}$ .

On a:

$$f(-x) = \left(\frac{a}{2}\right) \left(e^{\frac{(-x)}{a}} + e^{\frac{-(-x)}{a}}\right)$$

$$f(-x) = \left(\frac{a}{2}\right) \left(e^{\frac{-x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}\right)$$

$$f(-x) = \left(\frac{a}{2}\right) \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$$

On remarque, de ce qui précède que :

$$f(-x) = f(x)$$

On en déduit que la fonction  $f$  est paire.

La courbe de la chaînette renversée nous est donnée par la courbe de la fonction  $g$  telle que :

$$g(x) = -f(x)$$

### 1.3.2. Tracé de la courbe de la chaînette renversée au moyen du programme EXCEL

La courbe de la chaînette étant en tension est définie de  $\mathbb{R}$ , vers  $[a; +\infty[$  où « a » une valeur positive strictement supérieure à zéro, est un paramètre déterminante de la flèche  $f$ , de la courbe.

Dans le cadre de l'établissement de la courbe de la chaînette renversée, prenant des valeurs toujours de  $\mathbb{R}$ , cette fois-ci « a » prend ses valeurs dans l'intervalle  $]-\infty; a]$ , où « a » est strictement négatif.

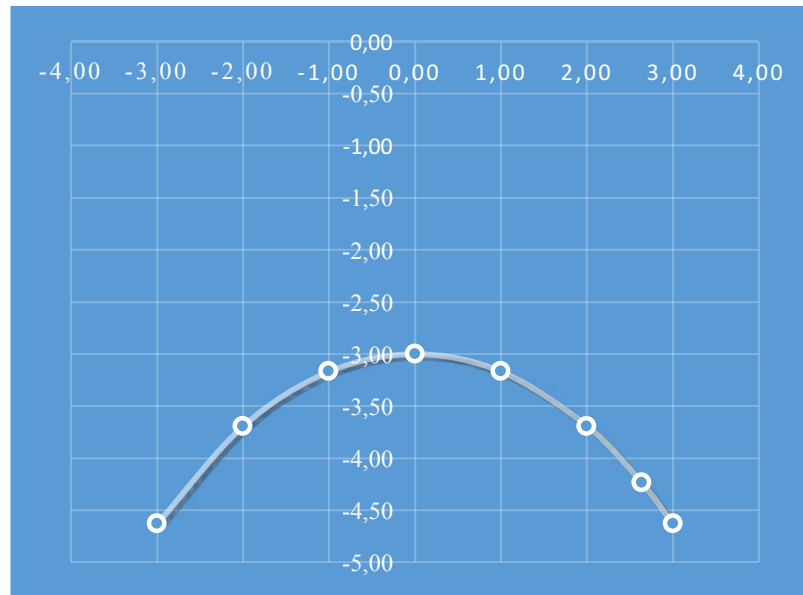
En visant ici le tracé la courbe de la chaînette renversée pour différentes valeurs du paramètre « a » nous nous sommes limités sur quelques valeurs dans l'intervalle  $[-3 ; 0 [$ .

Pour se faire, nous nous aiderons des tableaux des valeurs suivantes afin de tracer l'allure des différentes courbes selon le paramètres « a » : -3, -2 et -1, avec les courbes associées. Le remplissage des tableaux a été effectué à base des formules déjà établies et démontrées plus haut dans ce document.

Dans les différents tableaux, notons que, « x » représente la demie portée de la chaînette, et  $y = a + h$

*Tableau 2: Tableau des valeurs de la chaînette renversée pour "a"=-3*

| TABLEAU DES VALEURS DE LA CHAÎNETTE POUR "a"=-3 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>a</b>                                        | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 | -3,00 |
| <b>x</b>                                        | -5,00 | -4,00 | -3,00 | -2,00 | -1,00 | 0,00  | 1,00  | 2,00  | 2,63  | 3,00  | 4,00  | 5,00  |
| <b>y</b>                                        | -8,23 | -6,09 | -4,63 | -3,69 | -3,17 | -3,00 | -3,17 | -3,69 | -4,23 | -4,63 | -6,09 | -8,23 |



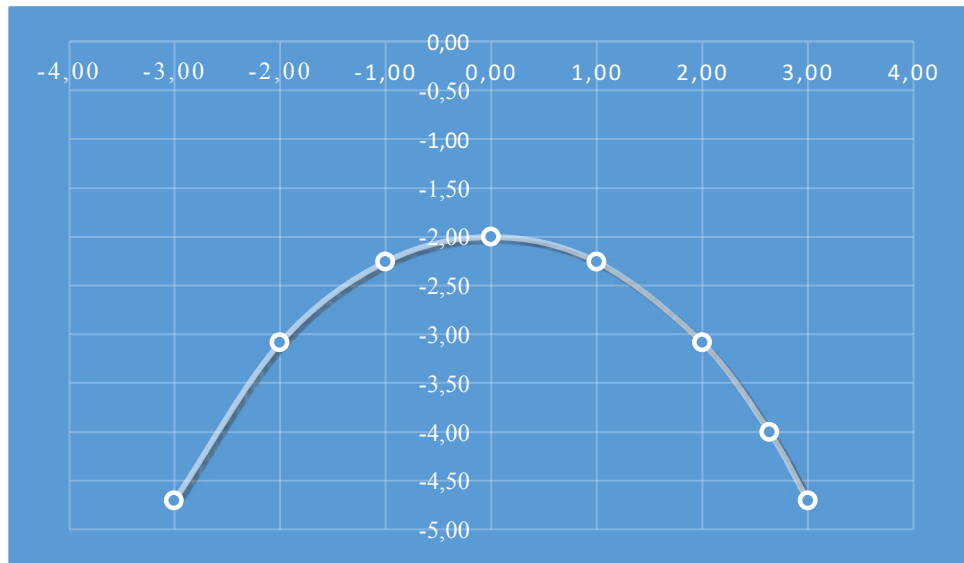
*Courbe 1 : Courbe de la chaînette renversée issu du tableau2*

Pour cette valeur du paramètre « a », nous constatons pour  $x = 2 \text{ m}$ , qui nous donne une portée de franchissement de  $4 \text{ m}$ , la flèche dans ce cas donne :  $f = 0,69 \text{ m}$ . Cette voûte est plus aplatie en son sommet avec un surbaissement  $S = 0,173$ , ce qui rend plus difficile la réalisation de la voûte en mode sans coffrage. Par contre lorsque  $x = 3$ , la flèche prend la valeur :  $f = 1,63 \text{ m}$  et ici la portée couverte est de  $6 \text{ m}$ . Le surbaissement  $S = 0,272$ .

Mais pour  $x = 4 \text{ m}$ , la flèche de la voûte prend la valeur :  $f = 3,09 \text{ m}$ , avec un surbaissement  $S = 0,386$ .

*Tableau 3: Tableau des valeurs de la chaînette renversée pour "a"=-2*

| TABLEAU DES VALEURS DE LA CHAÎNETTE POUR "a"=-2 |               |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |               |
|-------------------------------------------------|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| <b>a</b>                                        | -2,00         | -2,00        | -2,00        | -2,00        | -2,00        | -2,00        | -2,00        | -2,00        | -2,00        | -2,00        | -2,00        | -2,00         |
| <b>x</b>                                        | -5,00         | -4,00        | -3,00        | -2,00        | -1,00        | 0,00         | 1,00         | 2,00         | <b>2,63</b>  | 3,00         | 4,00         | 5,00          |
| <b>y</b>                                        | <b>-12,26</b> | <b>-7,52</b> | <b>-4,70</b> | <b>-3,09</b> | <b>-2,26</b> | <b>-2,00</b> | <b>-2,26</b> | <b>-3,09</b> | <b>-4,00</b> | <b>-4,70</b> | <b>-7,52</b> | <b>-12,26</b> |



*Courbe 2: Courbe de la chaînette renversée issu du tableau3*

Suivant la courbe 2, on peut lire à l'abscisse  $x = 2 \text{ m}$ , la valeur de la flèche  $f = 1,09 \text{ m}$ , ce qui nous donne un surbaissement

$$S = 0,273.$$

Pour  $x = 2,63 \text{ m}$ , la flèche  $f = 2 \text{ m}$ , avec un surbaissement

$$S = 0,380.$$

Lorsque  $x = 3$ , on a un flèche de  $2,7 \text{ m}$ , pour un surbaissement

$$S = 0,45.$$

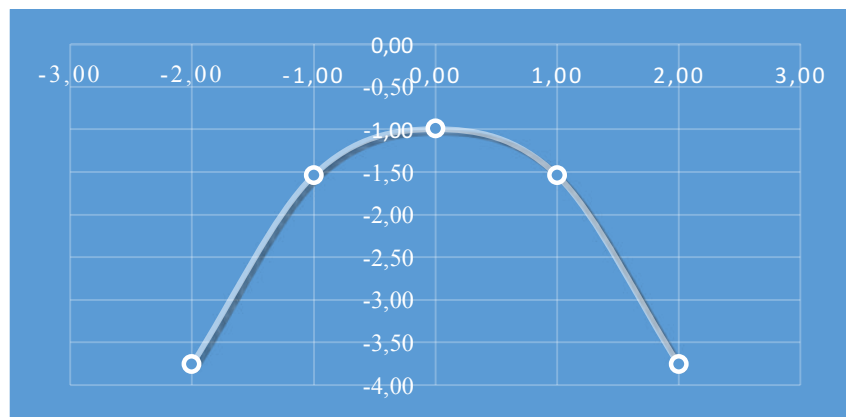
Au point d'abscisse  $x = 4 \text{ m}$ , la flèche donne :  $f = 5,52 \text{ m}$ , et présente une voûte surhaussée avec un surbaissement  $S = 0,69$  qui est supérieure à  $0,5$ .

En faisant la comparaisons par rapport au surbaissement, nous pouvons déduire de ce qui précède que la voûte dont les

caractéristiques sont :  $\begin{cases} a = 2 \\ f = 2 \text{ m} \end{cases}$ , est moins surbaissée que celle  
dont les caractéristiques sont :  $\begin{cases} a = 3 \\ f = 3,09 \text{ m} \end{cases}$

Tableau 4: Tableau des valeur de la chaînette renversée pour "a"=-1

| TABLEAU 3, DES VALEURS DE LA CHAÎNETTE POUR "a"=-1 |        |        |        |       |       |       |       |       |       |        |        |        |
|----------------------------------------------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| a                                                  | -1,00  | -1,00  | -1,00  | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00  | -1,00  | -1,00  |
| x                                                  | -5,00  | -4,00  | -3,00  | -2,00 | -1,00 | 0,00  | 1,00  | 2,00  | 2,63  | 3,00   | 4,00   | 5,00   |
| y                                                  | -74,21 | -27,31 | -10,07 | -3,76 | -1,54 | -1,00 | -1,54 | -3,76 | -7,00 | -10,07 | -27,31 | -74,21 |



Courbe 3: Courbe de la chaînette renversée issu du tableau 4

La présente courbe présente déjà des sauts de valeurs en hauteur, dans l'intervalle des abscisses suivant :  $[1; 2]$  et respectivement sur  $[-2; -1]$ , dont la flèche passe de 0,5 m à 2,75 m.

Il s'en suit que lorsque le paramètre « a » est plus petit que « 1 », l'optimisation de la portée devient impossible car ne pouvant franchir un espace de plus de 2 m, pour une flèche de moins de 2 m, si tant est-il que nous voulons suivre la théorie de la chaînette pour trouver la forme idéale de notre voûte dont la mise en œuvre de faire sans coffrage.

#### 1.4. La nature des efforts dans la chaînette renversée

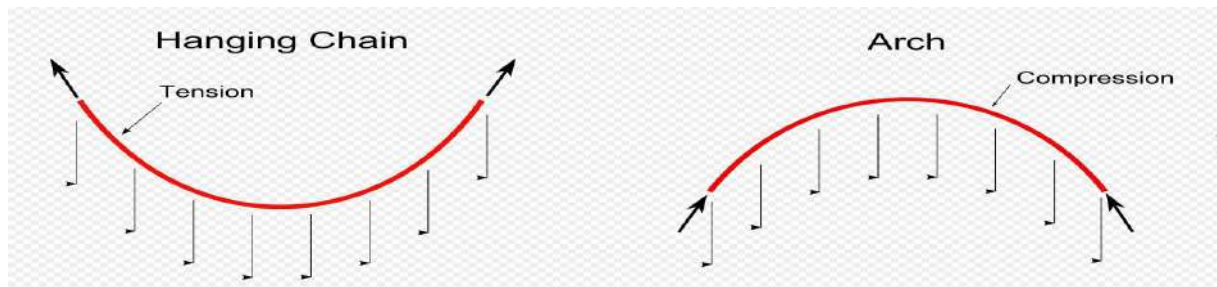


Figure 3: Efforts internes dans la chaînette et la chaînette renversée

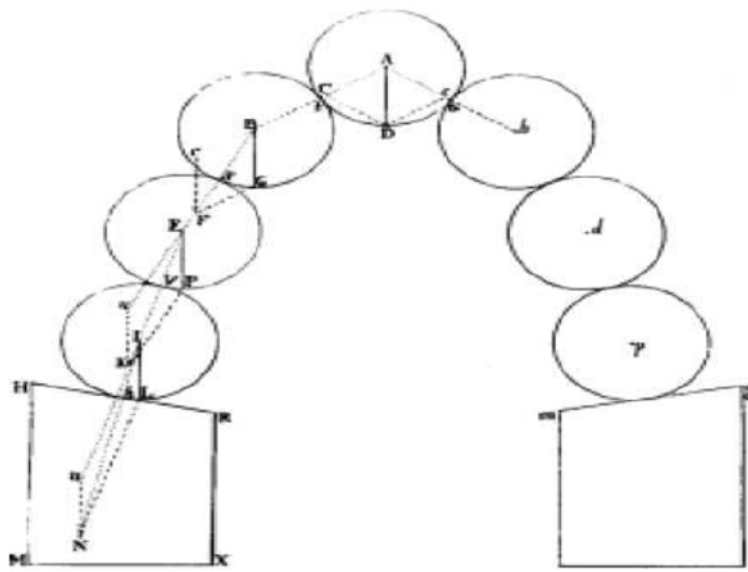
En prenant comme illustration les images ci-dessus, il est sans encombre de réaliser que la seule sollicitation observée au niveau de la chaînette est l'effort de traction, qui entraîne une tension aux niveaux des maillons de la chaînette. Et inversement, il est clair qu'en renversant la chaînette, il ne s'observera que des efforts de compression. N'est pas ce qu'à démontrer Hooke en affirmant justement à propos des chaînettes : « **On sait qu'on ne dérangerait rien dans l'équilibre des puissances en changeant seulement leur direction en son contraire** »

C'est là que réside l'utilité de la théorie des chaînettes car elle permettra la résolution de bon nombres de problèmes architecturaux relatifs, généralement aux constructions en arcs : les voûtes, les dômes.

En assimilant l'allure de la voûte nubienne à celle de la chaînette renversée, nous voulons assurer, dans la voûte nubienne la présence rien que des efforts de compression.

En effet la technique mise en œuvre dans la réalisation de la voûte nubienne ne tolérerait nul autre effort que celui de la compression. En suivant l'allure de la chaînette qui est entièrement

tendue, nous envisageons reproduire dans la chaînette renversée uniquement l'effort de compression pure. Une première tentative de cette propriété a été illustrée par Poleni sur une voûte de boules sphériques. Les résultats de cette expérimentation ont été concluant même si l'équilibre de cette voûte expérimentale ne tenait qu'au fil d'un souffle.



*Figure 4: Voûte expérimentale avec des boules par Poleni*

Fondant notre hypothèse sur cette assertion de Hooke qui trouve sa confirmation dans l'expérimentation de Poleni, nous nous sommes proposés d'utiliser les polygones funiculaires pour déterminer graphiquement les efforts internes induits, ainsi que les contraintes engendrées dans les voussoirs de notre voûte nubienne.

## II- STABILITE STRUCTURALE DE LA VOUTE NUBIENNE

L'étude de stabilité de la structure revient à rechercher la stabilité de la partie voûtée de la structure et de la stabilité du mur porteur.

### 2.1. La descente des charges sur la voûte nubienne

Connaissant le poids volumique du matériau qui servira à confectionner lesdits briquettes, on procèdera de la manière suivante pour déterminer la charge propre linéique de la voûte et par ricochet, calculer le poids du remplage ainsi que son point d'application.

Nous avons défini les dimensions des briquettes a confectionnées qui sont :  $24 \times 12 \times 4$ .

#### 2.1.1. Le poids d'une briquette

$$P = \gamma \times v$$

$$P = 18,25 \times 0,12 \times 0,24 \times 0,04$$

$$P = 21,024 \text{ N}$$

Le poids linéaire nous donne :

$$P_l = \frac{P}{0,04}$$

$$P_l = \frac{21,024}{0,04}$$

$$P_l = 525,6 \text{ N/m}$$

Nous pouvons déduire de ce qui précède la charge totale résultante :

La longueur développée de notre chaînette est  $L = 6,928 \text{ m}$

$$G_p = P_l \times L$$

$$G_p = 525,6 \times 6,928$$

$$G_p = 3\,641,3568 \text{ N}$$

$$G_p = 3,642 \text{ kN}$$

### **2.1.2. La surface de remplage**

On entend par cette expression, la maçonnerie de remplissage qui surplombe la voûte de part et d'autre.

Grâce au logiciel Archicad, nous avons utilisé la méthode graphique pour calculer le volume de matériaux de remplissage. Ainsi nous avons :

$$v_r = 2 \times 3,5 \times 0,12$$

$$v_r = 0,42 \text{ m}^3$$

Le point d'application de la résultante de la surcharge de remplages.

La résultante donne :

$$P_r = \frac{\gamma \times v_r}{2}$$

$$P_r = \frac{18,25 \times 0,42}{2}$$

$$P_r = 3,8325 \text{ kN}$$

En application la troisième équation de l'équilibre de la statique graphique, on a :

$$\sum M_i/A = P_r \cdot x$$

$$x = \frac{\sum M_i/A}{P_r}$$

$$x = \frac{18,25 \times 0,12 \times \left( \begin{array}{l} 0,31 \times 2,39 + 0,5 \times 2,14 + 0,36 \times 1,815 + \\ 0,27 \times 1,49 + 0,17 \times 1,155 + 0,09 \times 0,81 + \\ 0,04 \times 0,495 + 0,01 \times 0,175 \end{array} \right)}{3,8325}$$

$$x = 1,804 \text{ m}$$

## 2.2. Détermination des efforts internes dans la voûte par la méthode graphique

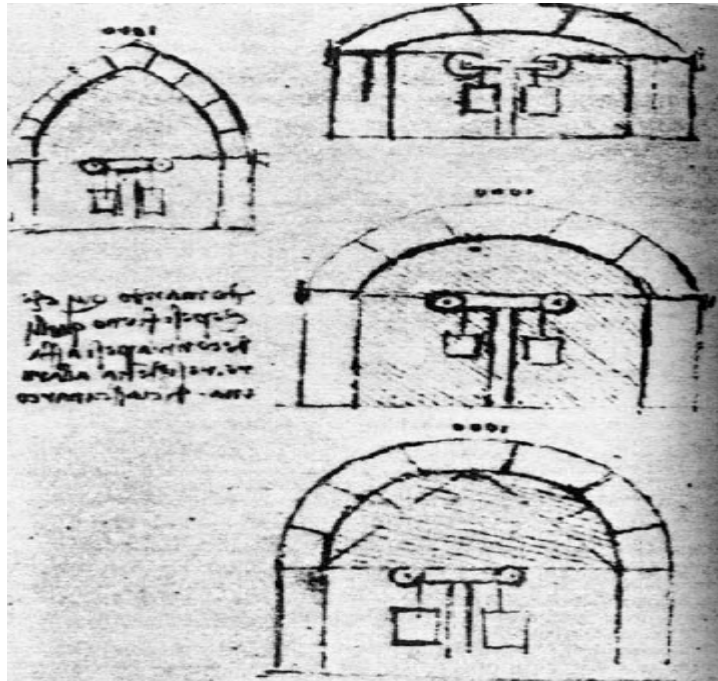
### 2.2.1. La ligne des pressions

Nous comptons beaucoup d'œuvres d'arts et architecturales de forme d'arc en Europe, qui sont enregistrées dans le patrimoine mondial par l'UNESCO. Dans les cathédrales et sur la majorité des édifices qui ont été construites pendant l'ère médiéval, reflètent une géométrie raffinée des formes d'arc du point de vue architecture et en même temps, sont très stables du point de vue structure. La recherche d'une structure stable et à la fois belle se synchronisent parfaitement. Tous ces travaux doivent leurs attributs, aux efforts

de nombreux penseurs et chercheurs de l'époque de la renaissance de l'Europe. La détermination du mode de transmission des charges des arcs grâce à leur forme a été l'objet de la réflexion de ces derniers.

L'un des premiers chercheurs qui a abordé la question était Léonard de Vinci (1452-1519) qui d'ailleurs sera encore le premier a pensé que les structures en arcs ne fonctionnent pas comme un élément homogène continu, mais qu'elle est constituée de voussoirs isolés agencés l'un après l'autre. C'est ainsi qu'il a élaboré une machine pour calculer la poussée horizontale au pieds des ponts en forme d'arc.

Ce n'est que plus tard vers 1675 que Robert Hooke (1635-1703) établit, selon *sa pensée qui dit « qu'on ne dérange rien dans l'équilibre des puissances en changeant seulement leur direction en son contraire »*, que la forme idéale d'un arc est obtenue en renversant la courbe décrite par une corde pendante sous son poids propre. Il faudra attendre des années plus tard, (en 1704) pour que Jakob Bernoulli (1654-1705) établisse l'équation mathématique de la chaînette grâce au calcul différentiel et intégral.



*Figure 5: Appareil de Léonard de Vinci pour calculer la poussée horizontale*

En 1730, Pierre Couplet fut le premier à ne pas baser sa théorie des arcs en maçonnerie sur une ligne des pressions admise, mais sur un mécanisme de ruine observé. Les essais menés par Augustin Hyacinthe Danyzy (1698-1777) en 1732, puis par Boistard en 1800, confirmèrent par ailleurs le mode de ruine considéré par Couplet. En admettant par hypothèse un frottement infini entre les voussoirs, une résistance en compression du matériau illimitée et l'absence de résistance à la traction pour la maçonnerie, ce dernier posa les fondements des théories plastiques modernes qui seront élaborées plus de deux siècles plus tard.

Un siècle plus tard, Méry développa une méthode graphique pour établir la ligne des pressions, après avoir pris en considération les résultats des travaux de recherches sur les arcs qui le précédaient, en 1840.

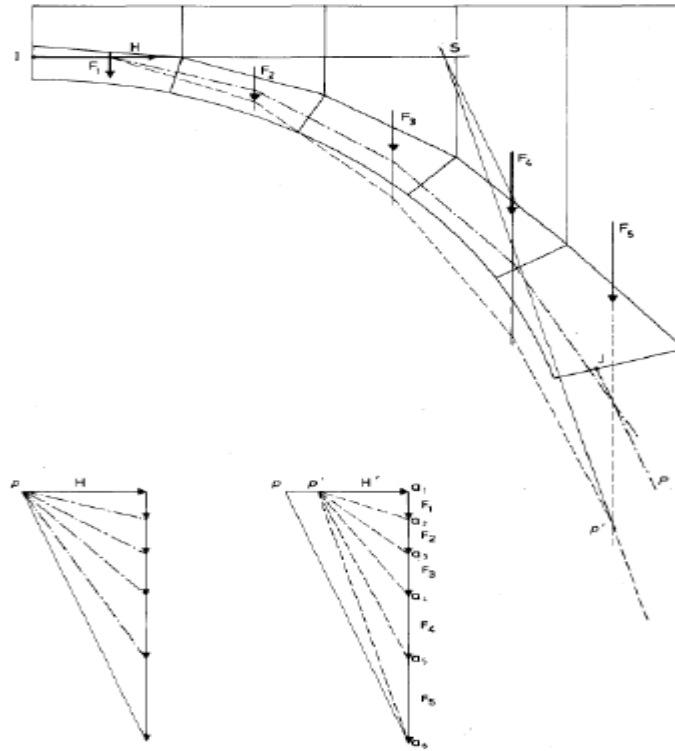


Figure 6: La ligne des pressions de Méry

En illustration à ce qui précède, nous allons prendre le cas d'école suivant :

Soit  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  et  $F_4$  quatre forces non concourantes. On combine  $F_1$  et  $F_2$  en une résultante  $R_2$  de support 2 ; puis  $R_2$  et  $F_3$  en  $R_3$  de support 3, et ainsi de suite. Considérant, dans cette construction répétitive, qu'au départ  $F_1 \equiv R_1$  (support 1), on appelle polygone funiculaire ou ligne des pressions, la ligne (1,2,3,4) du plan de situation : cette ligne représente, à tout niveau  $k$ , le support de la résultantes des forces  $F_i$ , pour  $i = 1, \dots, k$ . La forme de cette ligne dépend de l'ordre dans lequel les forces sont prises.



Figure 7: Exemple de la détermination de la ligne des pressions

### 2.2.2. Efforts normaux internes développés dans la voûte

La détermination de l'effort maximal dans la chaînette se fera dans cette rubrique, au moyen de la méthode du polygone funiculaire.

Sa mise en œuvre suit plusieurs étapes :

❖ Etape 1 :

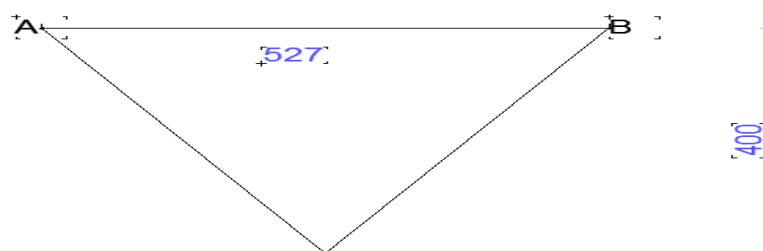


Figure 8 : formation du petit triangle isocèle

Tracer un triangle isocèle de base 5,27 m, qui constitue la portée de la chaînette, et de hauteur 4 m

( $4\text{ m} = \text{flèche} + a$ ), ensuite tracer un peu plus à droite du triangle, une ligne verticale de 36,42 m représentant graphiquement la charge équivalente totale du poids propre de la chaînette : 3,642 kN.

❖ Etape2 : Découpage en tranche de la voûte :

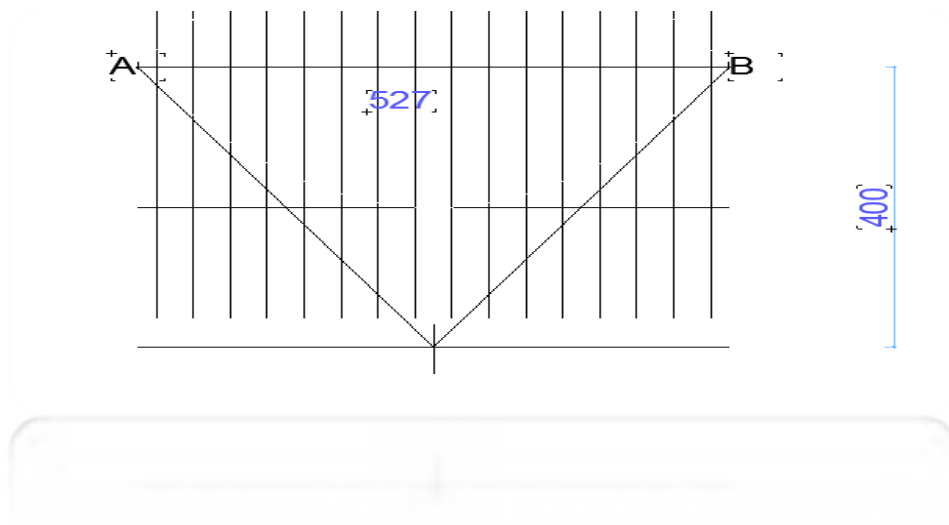


Figure 9: Découpage en tranche de la voûte

Le nombre de tranches est laissée au libre choix de l'ingénieur. Noter bien que, plus le nombre de tranches est importante, plus l'allure qui sera élaborée, est proche de l'allure réelle de la voûte telle que nous le présente la théorie des chainettes. Nous avons décidé de diviser la voûte en 16 tranches. La valeur de la charge uniformément répartie correspondante à ce découpage se calculera comme suit :

$$P_p = \frac{G_p}{16}$$

$$P_p = \frac{3642}{16}$$

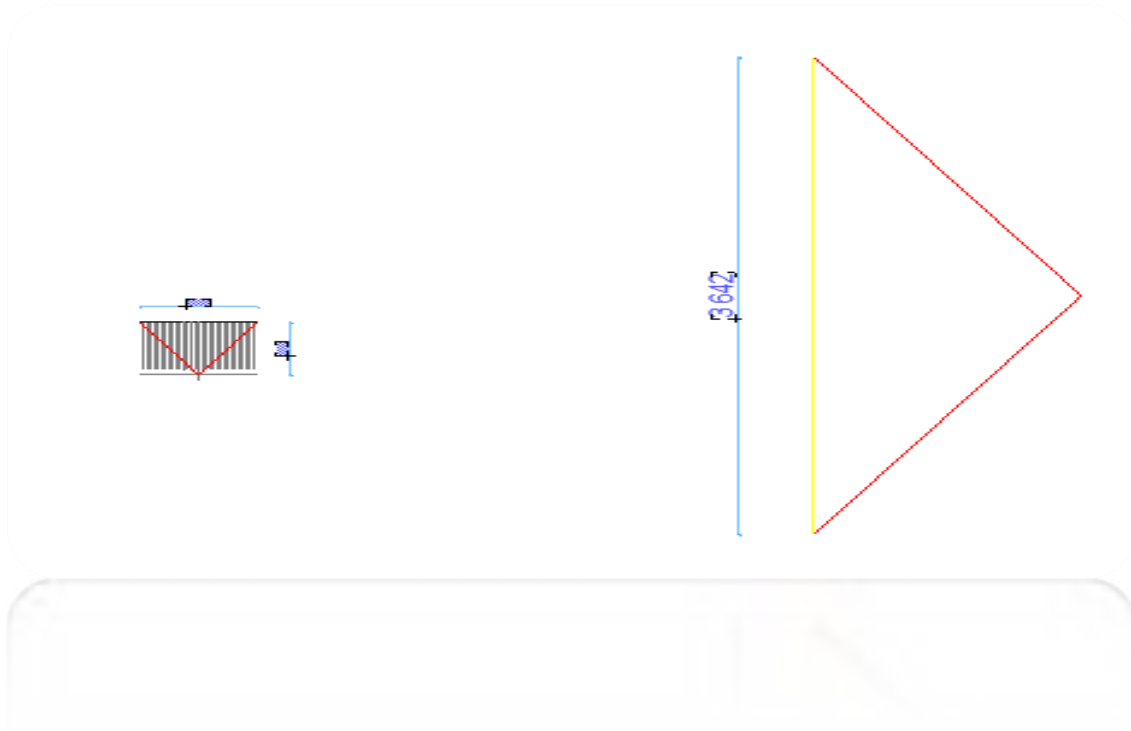
$$\mathbf{P_p = 691,082 \text{ N/m}}$$

Concrètement, cela revient à diviser le segment long de 5,27 m en, 16 plus petits segments.

Nous prenons soins de positionner la valeur

$$y = a + f = 4 \text{ m.}$$

❖ Etape3 :



*Figure 10: formation du grand triangle*

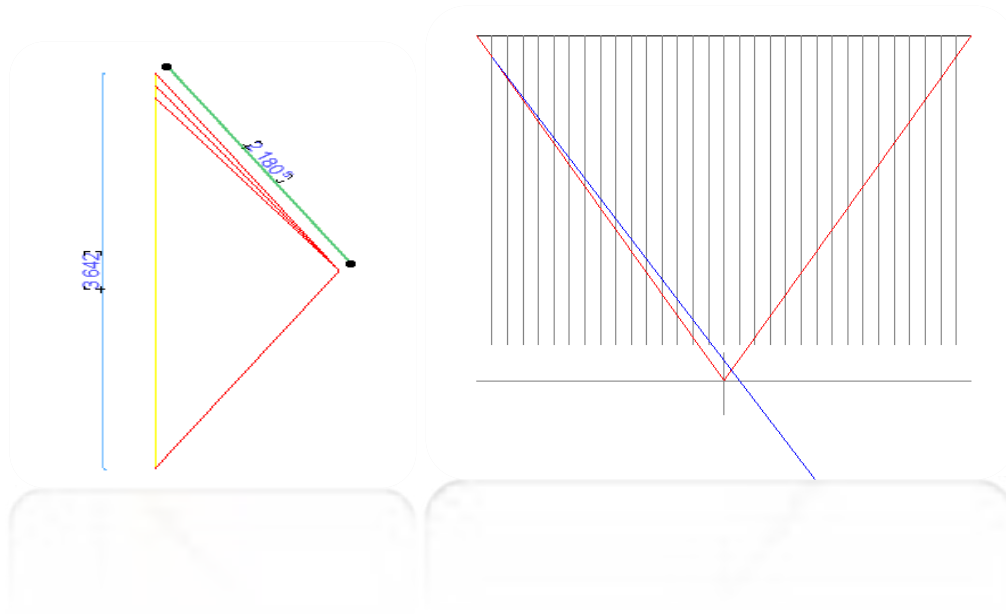
formons le triangle isocèle de hauteur  $4\text{ m}$  et traçons à côté un autre segment long de  $36,42\text{ m}$  représentant à l'échelle de  $1/100$ , la valeur de la charge équivalente du poids propre de la voûte.

Il faut faire la translation de chacun des hypoténuses, formées par les triangles semblables composant le triangle isocèle déjà tracé, sur le nouveau segment tracé et les prolonger de sorte à former un autre triangle isocèle, qui est cette fois-ci plus grand que le premier.

❖ Etape 4 : formation des rayons de segment

Pour former les rayons qui ne sont rien d'autres que les directions qui joints ensemble donnera l'allure de notre voûte et dont les longueurs lues sur le grand triangle isocèle, donnent la valeur de l'intensité dans ledit

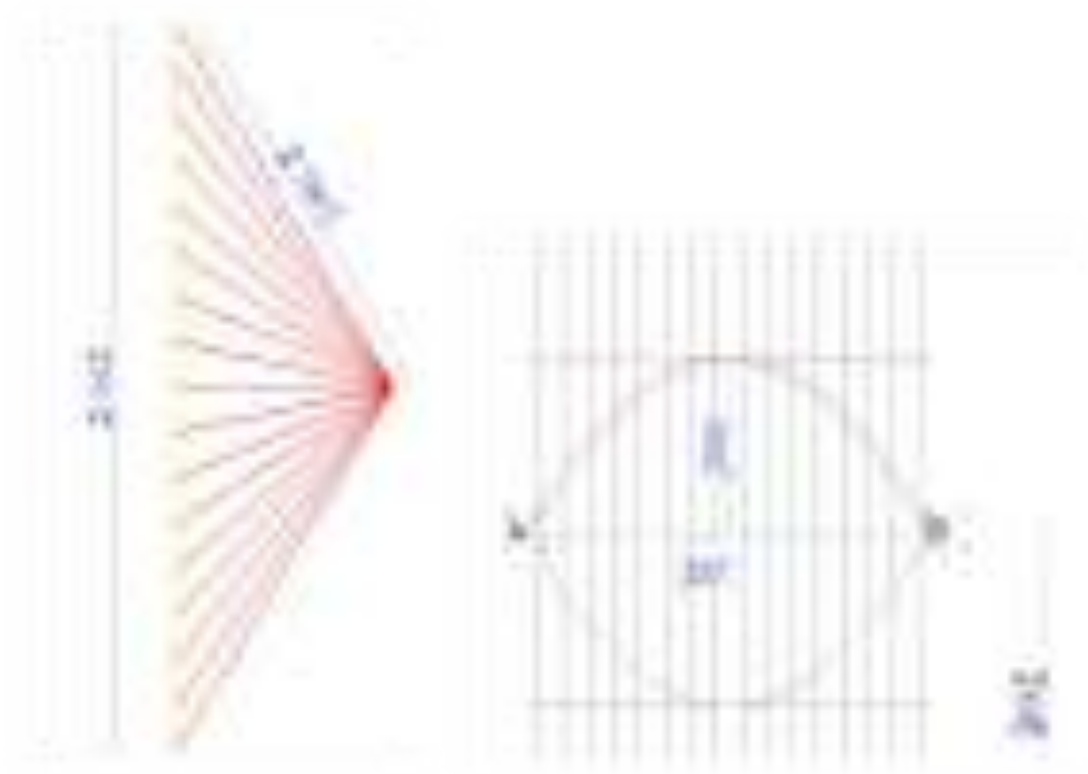
segment sur la voûte. Ensuite on construit l'allure de la voûte en découpant les segments dans leur intervalle respectif.



*Figure 11: Composition de la ligne des pressions*

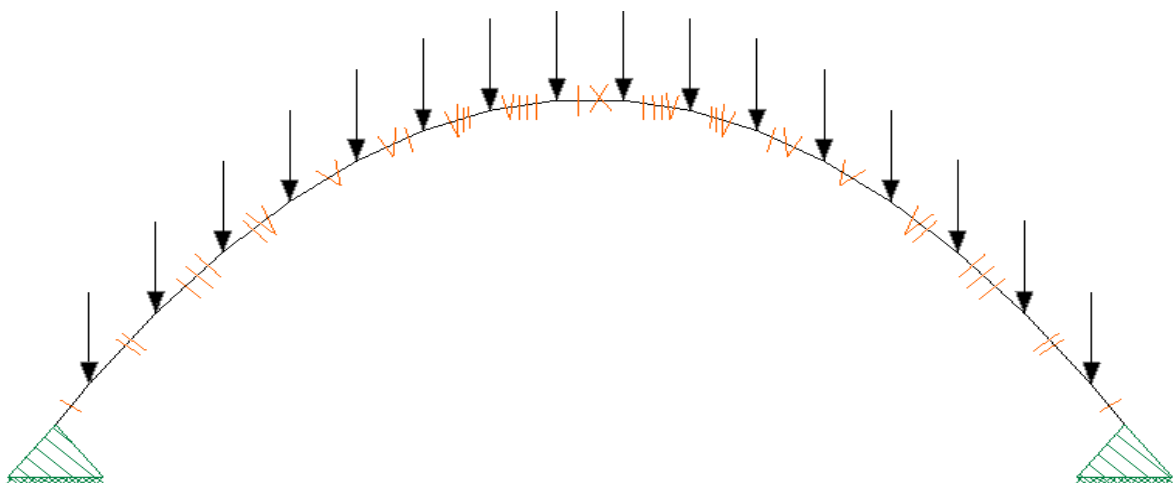
❖ Etage 5 :

Une fois la courbe construite, on procède au renversement de la courbe de sorte à avoir la forme exacte de la voûte en façade principale. A partir de là on fait la cotation des différents rayons de segments pour faire la lecture des efforts internes aux différents segments constituant notre voûte.



*Figure 12: Renversement de la chaînette*

Une annotation des rayons de segment a été réalisé de sorte à identifier les efforts dans les dits segments. Sous son poids propre uniquement, nous avons :



*Figure 13: Numérotation des segments constituant la chaînette*

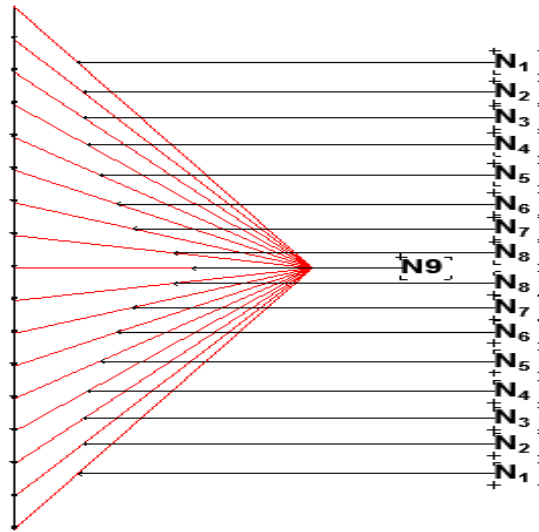


Figure 14: Détermination des efforts internes

Tableau 5: Valeur des efforts internes de la voûte sous poids propre

| Efforts         | N <sub>1</sub> | N <sub>2</sub> | N <sub>3</sub> | N <sub>4</sub> | N <sub>5</sub> | N <sub>6</sub> | N <sub>7</sub> | N <sub>8</sub> | N <sub>9</sub> |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Intensités (kN) | 2,181          | 1,995          | 1,818          | 1,654          | 1,506          | 1,380          | 1,283          | 1,22           | 1,199          |

La réaction aux appuis en intensité est égale à 2,181 kN avec une inclinaison de  $\alpha = 33,34^\circ$  par rapport à la verticale.

❖ Etape 6 : mise en place du remplage

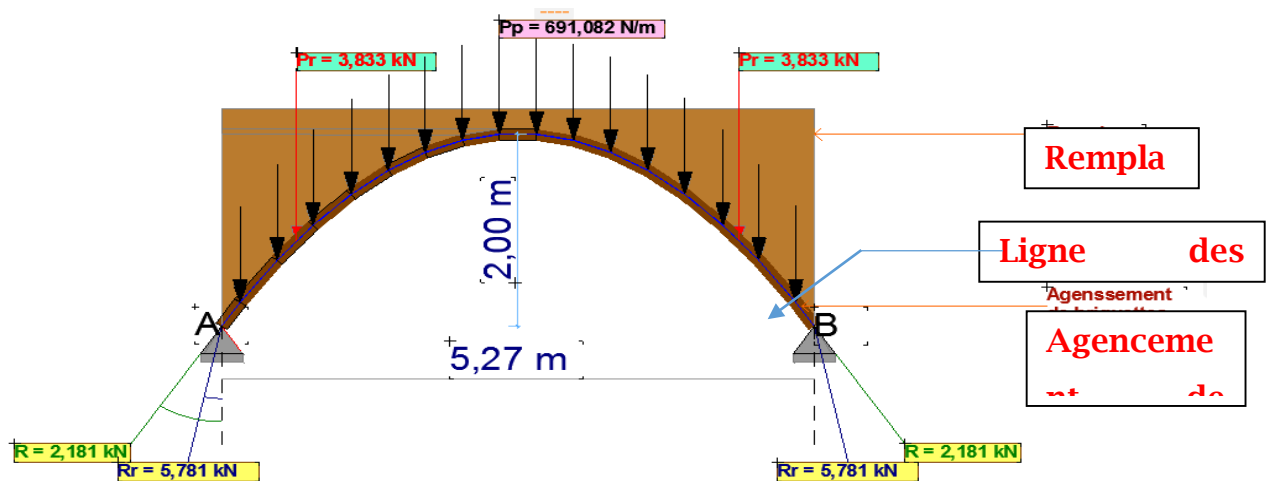


Figure 15: Détail des réaction aux appuis de la voûte

Pour pouvoir connaître le centre de gravité du remplage, nous nous sommes servis des tranches initialement réalisées. De là nous avons déduit que le point d'application de la résultante de poids du remplage se situe de part et d'autre de l'axe central vertical de la voûte à la distance : 1,804 m. ainsi nous obtenons le schéma ci-dessus. Nous ajoutons la valeur de  $P_r$ , à  $\frac{Q}{2}$  sur le grand triangle isocèle et on obtient l'intensité de la nouvelle réaction aux appuis sur le mur porteur tel que l'illustre le schéma ci-contre :

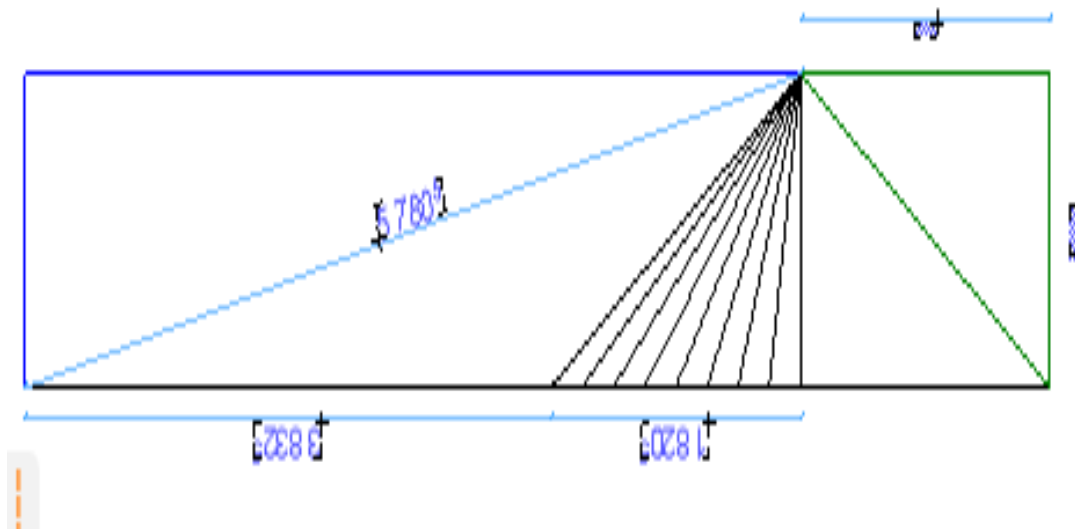


Figure 16: Détermination des réaction aux appuis

La nouvelle valeur de la réaction est

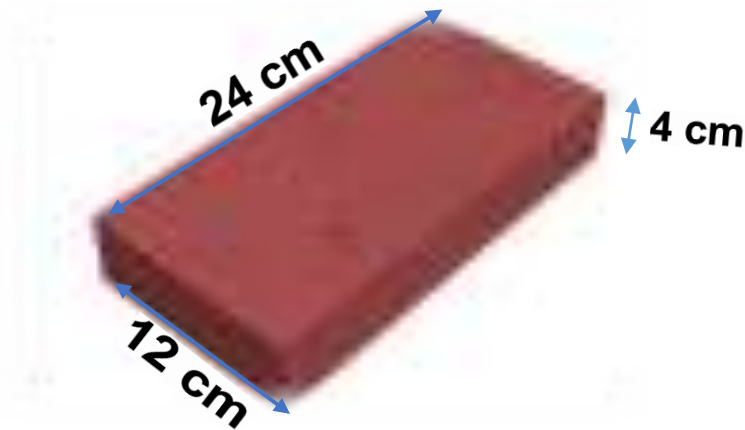
$$R_r = 5,781 \text{ kN}$$

Avec une inclinaison  $\alpha = 11,97^\circ$  par rapport à la verticale.

### III- CALCUL DE LA CONTRAINTE MAXIMALE INDUITE

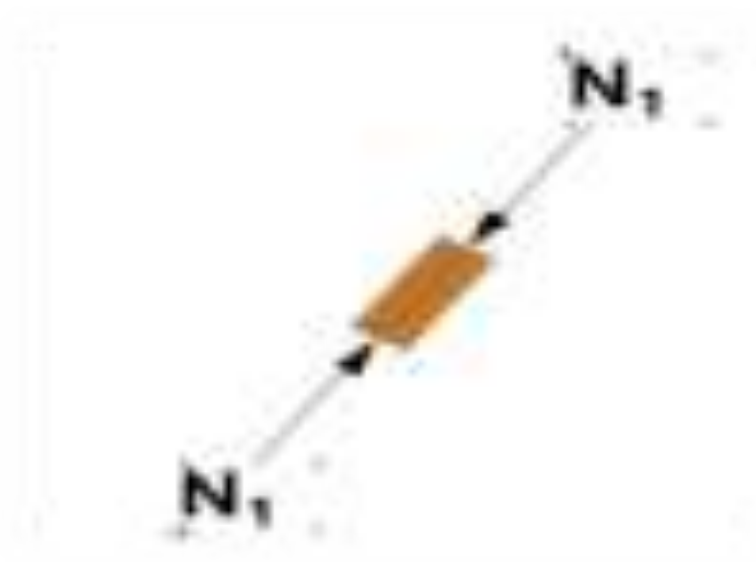
#### 3.1. La contrainte dans la voûte sans le remplage

##### 3.1.1. La contrainte maximale dans les briquettes



*Figure 17: Dimension des briquettes de la voûte*

Les briquettes qui compose les voussoirs sont sollicités à la compression, la contrainte normale maximale sera calculée avec l'effort interne maximal dans les voussoirs selon le découpage expérimental.



*Figure 18: Compression d'un segment de la voûte*

$$\begin{cases} \sigma_N = \frac{N_1}{A} \\ N_1 = 2,181 \text{ kN} \\ A = 0,0288 \text{ m}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_N = \frac{2,181 \times 10^{-3}}{0,0288}$$

$$\sigma_N = 0,076 \text{ MPa}$$

### 3.1.2. La contrainte dans le mur porteur

Les appuis de la voûte sont les murs porteurs en maçonnerie élancés de 2 m. Le point d'application de cet effort est situé à 6 cm

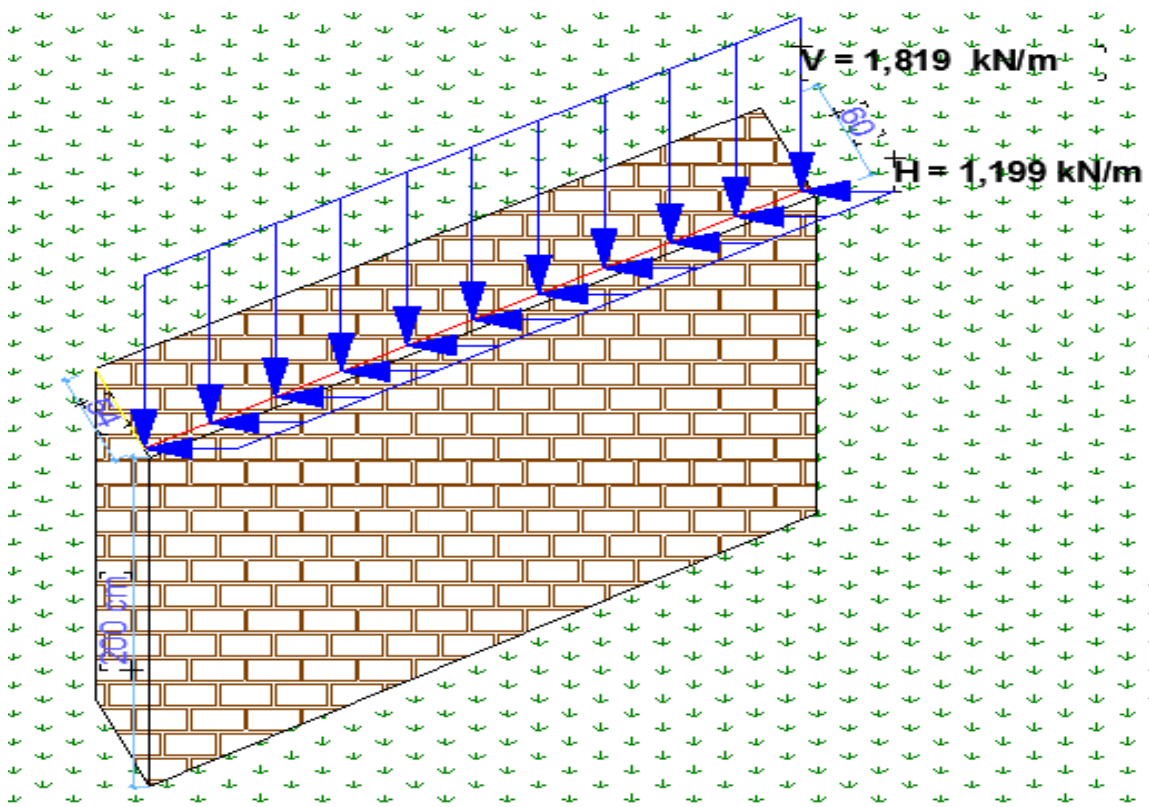


Figure 19: Schéma statique du mur porteur

du bord intérieur du mur porteur soit à 54 cm. La contrainte dans le mur porteur sera calculé avec la formule de la flexion composée :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} \pm \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}}$$

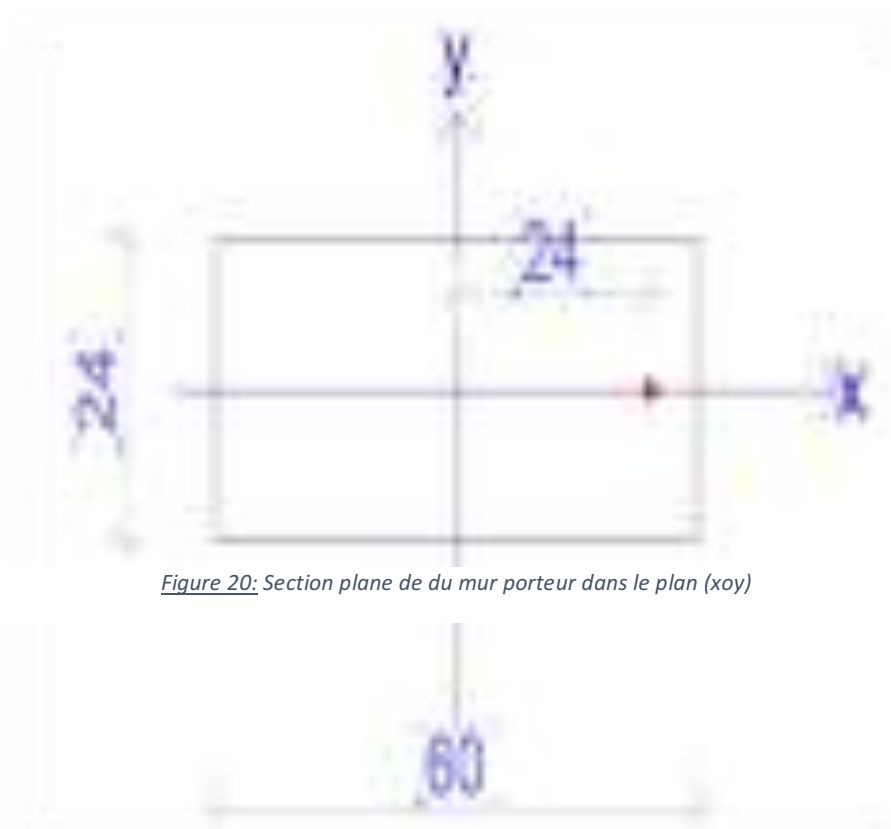


Figure 20: Section plane de du mur porteur dans le plan (xoy)

$$N = 1,819 \text{ kN}$$

$$A = 0,24 \times 0,60$$

$$A = 0,144 \text{ m}^2$$

$$I_{Gx} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{Gx} = \frac{0,24 \times (0,60)^3}{12}$$

$$I_{Gx} = 4,32 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$



Figure 21: Section plan du mur porteur dans le plan (yoz)

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{0,24 \times 2^3}{12}$$

$$I_{Gz} = 0,16 \text{ m}^4$$

$$M_{Gy} = H \cdot \ell$$

$$M_{Gy} = 1,199 \times 2$$

$$M_{Gy} = 2,398 \text{ kN.m}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}}$$

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,821}{0,144} + \frac{1,821 \times 0,24 y}{0,16} + \frac{2,398 \times y}{4,32 \times 10^{-3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-\frac{1,821}{0,144}}{\frac{1,821 \times 0,24}{0,16} + \frac{2,398}{4,32 \times 10^{-3}}}$$

$$\Leftrightarrow y = -0,023$$

Avec  $y$  est en  $m$ , est l'équation de l'axe neutre.

- ✓ Calculons la contrainte à la position du point d'application de la  $R_r$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}}$$

nous avons  $x = 0$  avec  $z = 0,24$

$$\sigma = \frac{1,821}{0,144} + \frac{1,821 \times 0,24 \times 0}{0,16} + \frac{2,398 \times 0,24}{4,32 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = 145,868 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma = 0,146 \text{ MPa}$$

- ✓ Calculons la contrainte au pied du mur son axe gravitaire

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}}$$

Ici nous prenons  $x = 0,12$  avec  $z = 0,30$

$$\sigma = \frac{1,821}{0,144} + \frac{1,821 \times 0,24 \times 0,12}{0,16} + \frac{2,398 \times 0,30}{4,32 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = 179,501 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma = 0,180 \text{ MPa}$$

Pour  $x = -0$  avec  $z = -0,30$  on a :

$$\sigma = \frac{1,821}{0,144} + \frac{1,821 \times 0,24 \times 0}{0,16} - \frac{2,398 \times 0,30}{4,32 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = -153,882 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma = -0,154 \text{ MPa}$$

### **3.2. La contrainte maximale induite pour une voûte avec remplage**

#### **3.2.1. La contrainte dans la brique**

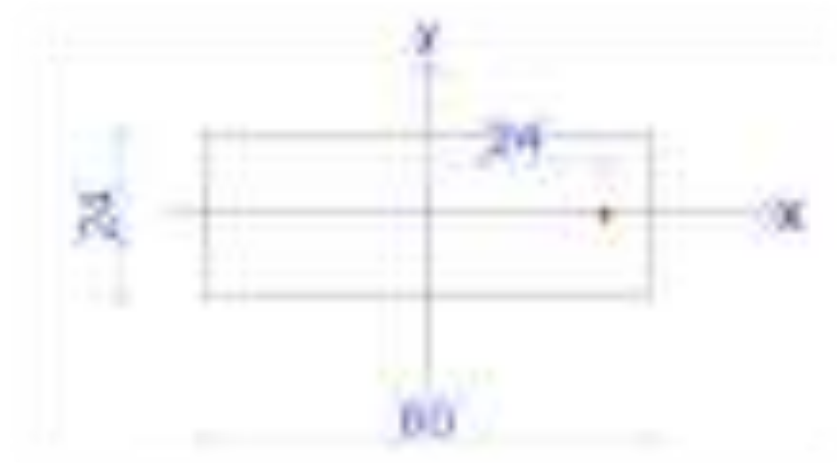
$$\begin{cases} \sigma_N = \frac{N_1}{A} \\ N_1 = 5,781 \text{ kN} \\ A = 0,0288 \text{ m}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_N = \frac{5,781 \times 10^{-3}}{0,0288}$$

$$\sigma_N = 0,201 \text{ MPa}$$

#### **3.2.2. La contrainte dans le mur porteur**

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} \pm \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}}$$



$$N = 1,819 \text{ kN}$$

$$A = 0,24 \times 0,60$$

$$A = 0,144 \text{ m}^2$$

$$I_{Gx} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{Gx} = \frac{0,24 \times (0,60)^3}{12}$$

$$I_{Gx} = 4,32 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$



$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{0,24 \times 2^3}{12}$$

$$I_{Gz} = 0,16 \text{ m}^4$$

$$M_{Gy} = H \cdot \ell$$

$$M_{Gy} = 1,199 \times 2$$

$$M_{Gy} = 2,398 \text{ kN.m}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}}$$

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5,653}{0,144} + \frac{5,653 \times 0,24 y}{0,16} + \frac{2,398 \times y}{4,32 \times 10^{-3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-\frac{5,653}{0,144}}{\frac{5,653 \times 0,24}{0,16} + \frac{2,398}{4,32 \times 10^{-3}}}$$

$$\Leftrightarrow y = -0,070 \text{ m}$$

est l'équation de l'axe neutre.

- ✓ Calculons la contrainte à la position du point d'application de la  $R_r$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot x}{I_{Gz}} + \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}}$$

nous avons  $x = 0$  avec  $z = 0,24$

$$\sigma = \frac{5,653}{0,144} + \frac{5,653 \times 0,24 \times 0}{0,16} + \frac{2,398 \times 0,24}{4,32 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = 172,479 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma = 0,172 \text{ MPa}$$

✓ Calculons la contrainte au pied du mur son axe gravitaire

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e \cdot y}{I_{Gz}} + \frac{M_{Gx} \cdot y}{I_{Gx}}$$

Ici nous prenons  $x = 0,12$  avec  $z = -0,30$

$$\sigma = \frac{5,653}{0,144} + \frac{5,653 \times 0,24 \times 0,12}{0,16} + \frac{2,398 \times 0,30}{4,32 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = 206,802 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma = 0,207 \text{ MPa}$$

Pour  $x = 0$  avec  $z = 0,30$  on a :

$$\sigma = \frac{5,653}{0,144} + \frac{5,653 \times 0,24 \times 0}{0,16} + \frac{2,398 \times 0,30}{4,32 \times 10^{-3}}$$

$$\sigma = 205,785 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma = 0,206 \text{ MPa}$$

### 3.3. Equilibre statique de la voûte

#### 3.3.1. Frottement

Le frottement est la résistance qui oppose au déplacement relatif de deux solides en contact. Dans le cas idéal de surfaces parfaitement lisses, cette résistance est nulle, ce qui est irréalisable en pratique. Le frottement dépend du type de mouvement (translation, rotation, roulement, ...), de la vitesse, de la présence

éventuelle d'un lubrifiant (frottement sec ou lubrifié), de l'état des surfaces en contact, de la température, etc. c'est un phénomène complexe.

On rappelle simplement ici la loi de Coulomb qui régit de façon exacte, mais toutefois simple et suffisante en première approximation le frottement de glissement sec à l'état statique.

La force de frottement limite , $F_{lim}$ , se calcule de la manière suivante :

$$F_{lim} = \mu R_v$$

Où  $\mu$  est le coefficient de frottement :  $\mu = \tan\varphi$  ,  $\varphi$  est l'angle d'inclinaison de la surface de contact par rapport à l'horizontale, et  $R_v$  est la composante de la réaction de cette surface de contact par rapport l'axe orthogonal à celle-ci.

On en déduit, pour corps en équilibre statique, que :

- ✓ Si  $F_{lim} \geq H$ , alors le solide reste immobile, on parle de frottement statique.
- ✓ Si  $F_{lim} < H$ , le solide se met en mouvement sous l'action de la force H, on parle de frottement cinématique.

1<sup>er</sup> cas : Voûte sous son propre poids uniquement

$$F_{lim} = 0,5R_v$$

$$F_{lim} = 0,5 \times 1,821$$

$$F_{lim} = 0,9105 \text{ kN} < H = 1,199 \text{ kN}$$

Il s'en suit tout naturellement que l'on observe un déplacement en tête du mur.

2<sup>ème</sup> cas : Voûte avec remplage

$$F_{lim} = 0,5R_v$$

$$F_{lim} = 0,5 \times 5,653$$

$$F_{lim} = 2,8265 \text{ kN} > H = 1,199 \text{ kN}$$

Nous dégageons de cette comparaison qu'il ne se crée aucun déplacement dû aux forces horizontales.

### **3.3.2. Equilibre limite du mur porteur**

Les sollicitations observées au niveau du mur porteur qui constitue l'appui de notre voûte, peuvent se décomposer suivant l'axe des abscisses (OY) et l'axe des ordonnées (OZ). Suivant l'axe des abscisses, la composante des sollicitations en tête du mur en maçonnerie tend à occasionner un renversement ce dernier alors que nous observons que celles suivant le deuxième axe considéré, engendre une compression du mur porteur.

La vérification ici de l'équilibre limite met en jeu deux actions opposées : il s'agit des forces de déséquilibre et les forces de stabilisation. Dans le cas présent, la force de déséquilibre est la composante horizontale H alors que celle de stabilisation est la composante verticale N de la sollicitation en tête du mur porteur. Dans ce système, pour la stabilité de notre mur porteur, il consiste à s'assurer que les déplacements : la translation due à la poussée de la voûte

$$\gamma_{transl} = \frac{F_{stab}}{F_{déséq}}$$

et la rotation engendrée par les moments de renversement

$$\gamma_{rot} = \frac{M_{stab}}{M_{déséq}}$$

ne seront pas préjudiciable pour la l'équilibre d'ensemble de notre structure.

Ainsi nous allons vérifier les relations suivantes :

Généralement dans la pratique, l'effet stabilisant doit absolument être supérieur à celui déséquilibrant, de sorte que les rapports :

$$\gamma_{transl} = \frac{F_{stab}}{F_{déséq}} \quad et \quad \gamma_{rot} = \frac{M_{stab}}{M_{déséq}}$$

Soient supérieurs à l'unité. Ils s'appellent coefficients de sécurité et sont généralement choisis égaux ou supérieurs à 1,5

$$\gamma_{transl} \geq 1,5 \quad et \quad \gamma_{rot} \geq 1,5$$

1<sup>er</sup> cas : voûte sous son propre poids uniquement

$$F_{stab} = F_{lim}$$

$$F_{déséq} = H$$

$$\gamma_{transl} = \frac{0,9105}{1,1985}$$

$$\gamma_{transl} = 0,76 < 1,5.$$

On observe un déplacement de translation.

$$M_{stab} = G \times \frac{b}{2} + N \times e$$

$$G = \gamma \times v$$

$$G = 18,25 \times 0,60 \times 2 \times 0,24$$

$$G = 5,256 \text{ kN}$$

$$M_{stab} = 5,256 \times 0,30 + 1,821 \times 0,24$$

$$M_{stab} = 2,014 \text{ kN.m}$$

$$M_{déséq} = H \times h$$

$$M_{déséq} = 1,1985 \times 2$$

$$M_{déséq} = 2,397 \text{ kN.m}$$

$$\gamma_{rot} = \frac{2,014}{2,397}$$

$$\gamma_{rot} = 0,84 < 1,5$$

De ce qui précède on conclut que la structure entière n'est pas stable lorsque la voûte est soumise à son propre poids uniquement.

2<sup>ème</sup> cas : Voûte avec remplage

$$F_{stab} = F_{lim}$$

$$F_{stab} = 2,8265 \text{ kN} > H = 1,1985 \text{ kN}$$

$$M_{stab} = G \times \frac{b}{2} + N \times e$$

$$G = \gamma \times v$$

$$G = 18,25 \times 0,60 \times 2 \times 0,24$$

$$G = 5,256 \text{ kN}$$

$$M_{stab} = 5,256 \times 0,30 + 5,653 \times 0,24$$

$$M_{stab} = 2,934 \text{ kN.m}$$

$$M_{déséq} = H \times h$$

$$M_{déséq} = 1,1985 \times 2$$

$$M_{déséq} = 2,397 \text{ kN.m}$$

De ce qui précède, on a :

$$\gamma_{transl} = \frac{F_{stab}}{F_{déséq}}$$

$$\gamma_{transl} = \frac{2,827}{1,1985}$$

$$\gamma_{transl} = 2,36 > 1,5$$

$$\gamma_{rot} = \frac{M_{stab}}{M_{déséq}}$$

$$\gamma_{rot} = \frac{2,934}{2,397}$$

$$\gamma_{rot} = 1,22 < 1,5$$

On remarque que le coefficient de sécurité lié à la rotation est trop petit.

La structure est stable pour un coefficient de sécurité unité. Cependant si nous tenons à atteindre un coefficient de sécurité de 1,5 ; nous devons dimensionner en conséquence le mur porteur sur lequel prend appui notre voûte.

Soit

$$\gamma_{rot} = 1,5$$

$$\frac{M_{stab}}{M_{déséq}} = 1,5$$

$$M_{stab} = 1,5M_{déséq}$$

$$M_{stab} = 1,5 \times 2,3975$$

$$M_{stab} = 3,59625 \text{ kN.m}$$

Or,

$$M_{stab} = G \times \frac{b}{2} + N \times e$$

Donc

$$G = \frac{(M_{stab} - N \times e) \times 2}{b}$$

$$G = \frac{(3,59625 - 5,653 \times 0,24) \times 2}{0,6}$$

$$G = 7,4651 \text{ kN}$$

De plus

$$v = \frac{G}{\gamma}$$

$$v = \frac{7,4651}{18,25}$$

$$v = 0,409 \text{ m}^3$$

- 
- ✓ Calculons les nouvelles dimensions du mur si nous fixons sa hauteur à 2,5 m et un côté à 24 cm

$$v = a \times b \times h$$

$$b = \frac{v}{a \times h}$$

$$b = \frac{0,409}{2,5 \times 0,24}$$

$$b = 0,682m$$

Prenons

$$b = 70 \text{ cm}$$

### 3.3.3. Vérification de la stabilité de l'ouvrage

$$F_{stab} = F_{lim}$$

$$F_{stab} = 2,8265 \text{ kN} > H = 1,1985 \text{ kN}$$

$$M_{stab} = G \times \frac{b}{2} + N \times e$$

$$G = \gamma \times v$$

$$G = 18,25 \times 0,70 \times 2,5 \times 0,24$$

$$G = 7,665 \text{ kN}$$

$$M_{stab} = 7,665 \times 0,30 + 5,653 \times 0,24$$

$$M_{stab} = 3,656 \text{ kN.m}$$

$$M_{déséq} = H \times h$$

$$M_{déséq} = 1,1985 \times 2$$

$$M_{déséq} = 2,397 \text{ kN.m}$$

De ce qui précède, on a :

$$\gamma_{transl} = \frac{F_{stab}}{F_{déséq}}$$

$$\gamma_{transl} = \frac{2,827}{1,1985}$$

$$\gamma_{transl} = 2,36 > 1,5$$

$$\gamma_{rot} = \frac{M_{stab}}{M_{déséq}}$$

$$\gamma_{rot} = \frac{3,656}{2,397}$$

$$\gamma_{rot} = 1,53 > 1,5$$

Nous concluons que pour notre mur porteur de 2,5 m de hauteur avec une épaisseur de 70 cm, nous obtenons la stabilité de notre structure lorsque la voûte est surchargée par son remplage.

## **CHAPITRE 3 : MODELISATION ET SIMULATION DE LA PORTEE DE LA VOÛTE NUBIENNE**

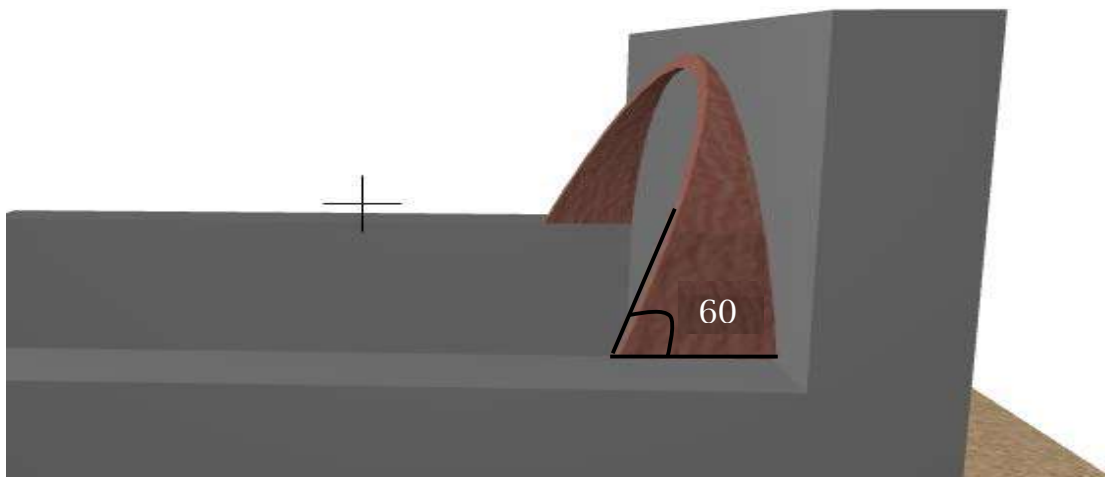
### **I- MISE EN ŒUVRE DE LA VOUTE NUBIENNE**

#### **1.1. La pose de brique dans la voûte**

##### **1.1.1. L'inclinaison des briques lors de la pose**

La mise en œuvre de la voûte nubienne se fait sans coffrage. Le rôle du coffrage dans toute construction est d'étayer les parois des éléments ; et justement dans notre cas le coffrage devrait jouer ce rôle au niveau de la paroi de la voûte s'il était pris en compte dans ce type de construction. La paroi de la voûte nubienne se réalise progressivement jusqu'à la formation de l'ogive. Du point de vue mécanique, une inclinaison entre 60° à 70° est imposée aux briques, jusqu'à ce qu'on parvienne à atteindre le second mur pignon, en partant du premier.

Cette inclinaison répartit la charge de la paroi de la voûte entre les murs pignons et les murs longs pans ; et ce qui rend inutile l'étayement de la paroi de la voûte.



*Figure 22: Mise en œuvre de la voûte montrant l'angle de pose des briquettes*

### **1.1.2. L'appareillage des briquettes au niveau du mur porteur**

Le choix d'une bonne disposition des briquettes a une grande incidence sur la qualité de la maçonnerie des murs porteurs. La résistance du mur porteur à la poussée horizontale observée en tête de ce dernier, nous amène à une meilleure compréhension de la disposition adoptée généralement au niveau des constructions en maçonnerie.

Les dimensions des briquettes qui entrent dans la mise en œuvre du mur porteur, sont :  $40 \times 20 \times 10 \text{ cm}^3$ . Selon l'épaisseur du mur porteur, il nous faudra disposer deux briquettes, l'une suivant la grande longueur ; et l'autre suivant la petite longueur. Une répétition de ce model va nous permettre d'atteindre la hauteur requise pour la stabilité d'ensemble de la voûte.



*Figure 23: Appareillage du mur porteur*

## **1.2. Le mortier**

### **1.2.1. Le mortier de fabrication des briquettes**

Le mortier de fabrication des briquettes, est issu d'un mélange homogène de la terre argileuse et sableuse, d'eau et de liant végétale (dans notre cadre d'étude c'est l'infusion de néré qui est mise en jeu).

Les briques sont coulées dans un cadre ouvert rectangulaire dont les dimensions standards en centimètre, au Burkina Faso sont :

- $10 \times 20 \times 40$  pour les murs
- $4 \times 12 \times 24$  pour les voûtes.

Une fois la composition du mélange est achevée (selon les proportions définies dans le tableau1, affecté de la quantité de briquettes recherchée), on procède au mélange de l'ensemble jusqu'à l'obtention d'une pâte consistante et homogène. Après que

le mélange ait été versé dans le moule, on peut le compacter légèrement à la main, puis on le retire. Après quelques heures, les briques sont tournées sur leur tranche pour finir le séchage.



*Photo 1: Fabrique de briquettes*

Le temps séchage dure 2 à 3 semaines (ou selon les conditions climatiques) et ceci est capital pour la bonne qualité de briquettes car, cette disposition permet de éviter le retrait pendant la phase de la construction. Etant donné que nous sommes en présence d'un composé argileux, il est vivement conseillé de placer les briques à l'ombre lors du séchage et dans une atmosphère assez sèche pour éviter les fissures.

Les sols propices à la fabrication de briques sont constitués de :

- Sable : 55 à 75 %
- Limon : 10 à 28 %

- Argile : 15 à 18%
- Matières organiques inférieures à 3%

### **1.2.2. Le mortier de pose des briquettes**

Le mortier utilisé dans la mise en œuvre de la structure en voûte est un mélange de la terre de barre et de l'eau selon une certaine proportion de sorte que la consistance de la pâte obtenue soit suffisante pour résister au glissement des briquettes de la paroi de la voûte.



*Photo 2: Mortier de pose de briquettes*

Ce mortier de pose sera le même qui a servi pour fabriquer les briquettes ; cette fois-ci, il n'y aura pas de paille dans le mélange. En fait, ce mortier constituera de liaison entre les briquettes. Il est sollicité à la compression.

## II- MODELISATION DE LA VOUTE AVEC LE LOGICIEL ROBOT

### 2.1. La structure en voûte

Soit à dimensionner une voûte de hauteur 2 m avec une portée de 5,27 m et d'une longueur de 7 m. L'épaisseur de la voûte est prise égale à 4 cm. La paroi de la voûte sera en banco dont les caractéristiques physiques et mécaniques sont décrites dans le tableau suivant :

*Tableau 6: Caractéristiques physico-mécaniques du Banco*

| CARACTERISTIQUES PHYSIQUE ET MECANIQUE DU BANCO |                         |
|-------------------------------------------------|-------------------------|
| Module de Young                                 | 2000 MPa                |
| Coefficient de Poisson                          | 0,33                    |
| Module de cisaillement                          | 658 MPa                 |
| Densité                                         | 18,25 kN/m <sup>3</sup> |
| Expansion thermique                             | 0,002005 /°C            |
| Coefficient d'amortissement                     | 0,02                    |
| Résistance au cisaillement                      | 0,619 MPa               |
| Résistance à la compression                     | 3,34 MPa                |

La voûte s'appuie sur ses quatre côtés et le type d'appuis qui sera utilisé est en maçonnerie tel que nous le découvrirons dans la

mise en route du logiciel Robot. Le dimensionnement se fera par la méthode des éléments finis.

Avant toute chose, étant donné que ce type de matériau n'est pas pris en compte dans les paramètres par défaut du logiciel Robot, néanmoins, il nous est donné la possibilité de créer de matériau en intégrant directement ses caractéristiques dans la base de données des matériaux du programme.

## **2.2. Les étapes de la modélisation, au dimensionnement de la voûte**

### **Etape 1 : Mise en route du logiciel**

Nous lançons le démarrage du logiciel Robot en double cliquant sur l'icône du logiciel qui se trouve sur le bureau de Windows. Pour choisir l'option coque, il faudra aller dans l'option avancé et cliquer « étude d'une coque »



*Image 1: Démarrage de Robot*

## **Etape 2** : création du matériau « Banco »

Aller dans la palette « Outils » et choisir l'option « Préférence de la tâche... ». Aussitôt une fenêtre s'ouvre présentant les paramètres par défaut du programme. Ensuite cliquer sur « matériaux puis modifier. Là cliquer sur « Autres » et insérer les données du Banco comme nous pouvons l'observer sur la vue suivante :

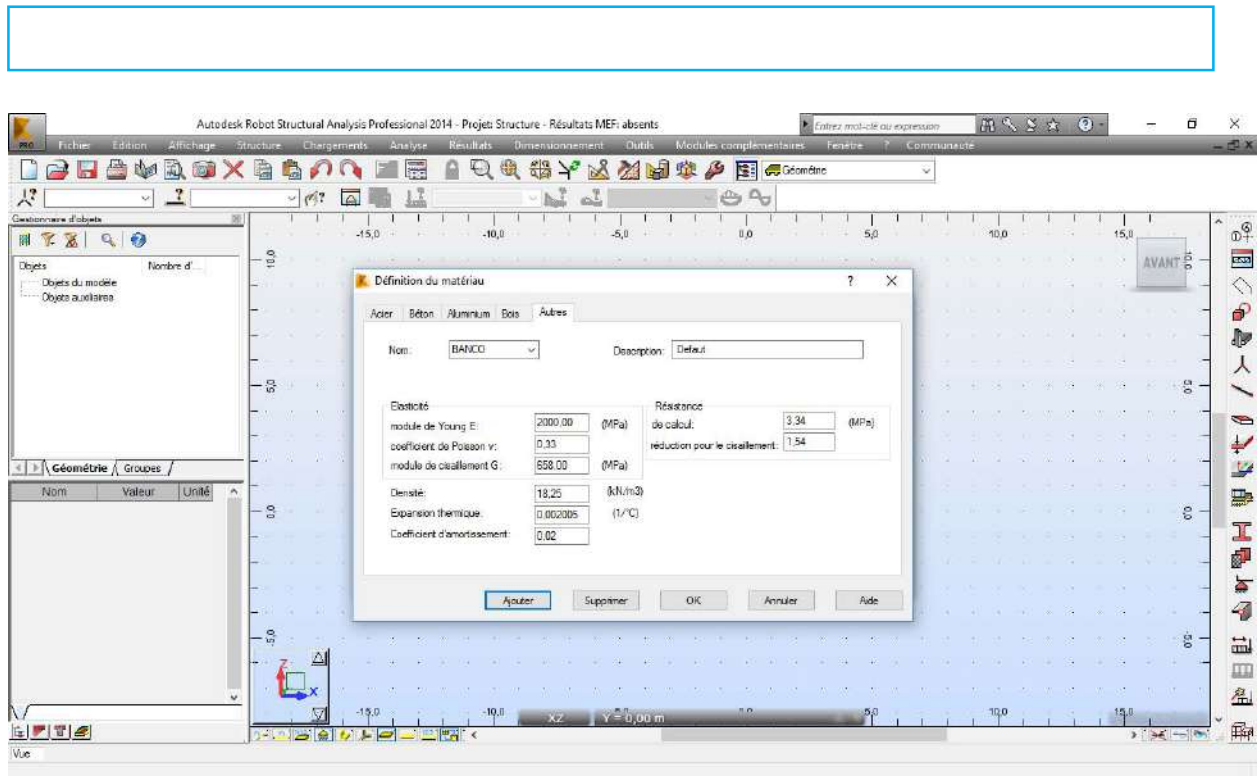


Image 2: Création du matériau Banco dans Robot

**Etape 3 :** Etablissement de la grille des lignes de construction et tracé de la courbe la chaînette renversée.

- ✓ Suivant l'axe x-x, positionner les axes secondaires de y-y perpendiculaires à l'axe principal x-x, aux points  $A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_1 \begin{pmatrix} 2,635 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 \begin{pmatrix} 5,27 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- ✓ Suivant l'axe y-y, positionner les axes secondaires de x-x perpendiculaires à l'axe principal y-y, aux points  $B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- ✓ Suivant l'axe z-z, positionner les axes secondaires de x-x perpendiculaire à l'axe principal z-z, aux points  $C_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- ✓ Prendre l'option « arc » dans la palette « objet » ; une fenêtre s'ouvre. Sélectionner au niveau de la méthode de définition

de l'arc, l'option « début-centre-fin ». Puis dans « Paramètre » cochet discrétisation et mettre dans la case suivante « 30 ».

✓ Ensuite former l'arc.

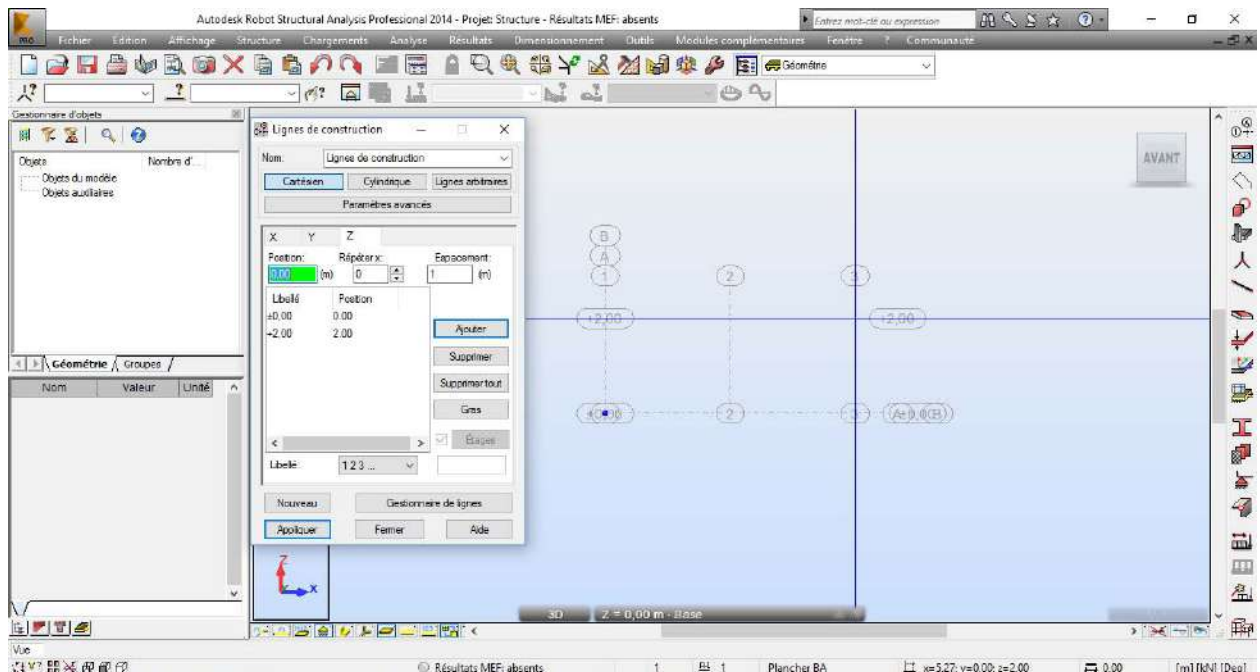


Image 3: Etablissement des lignes de construction

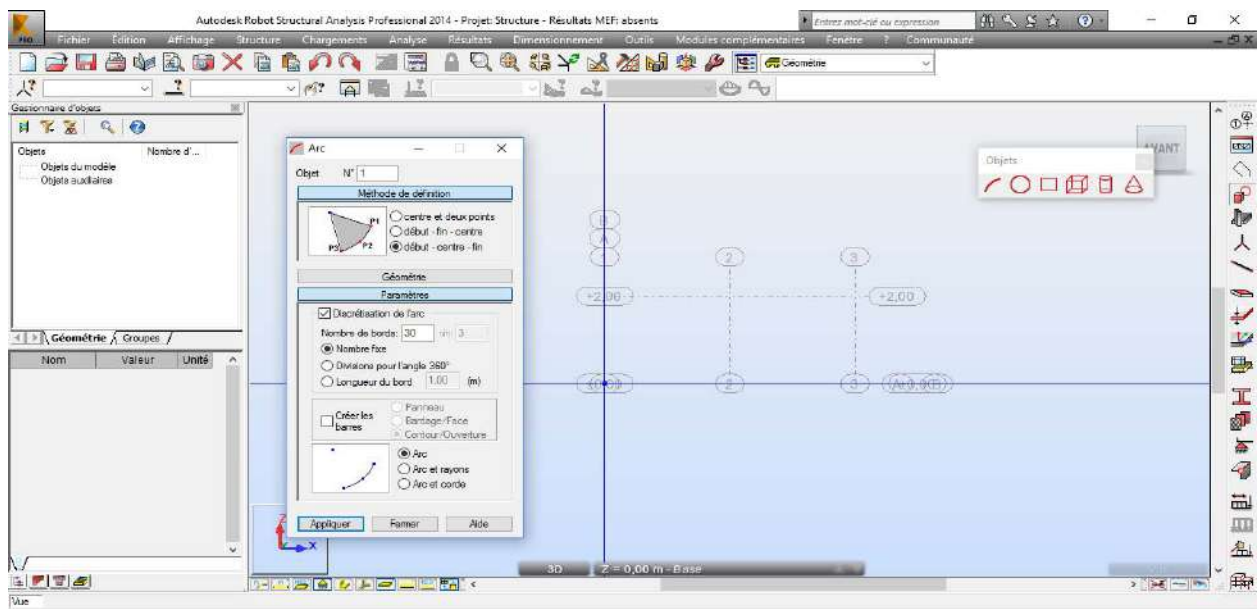
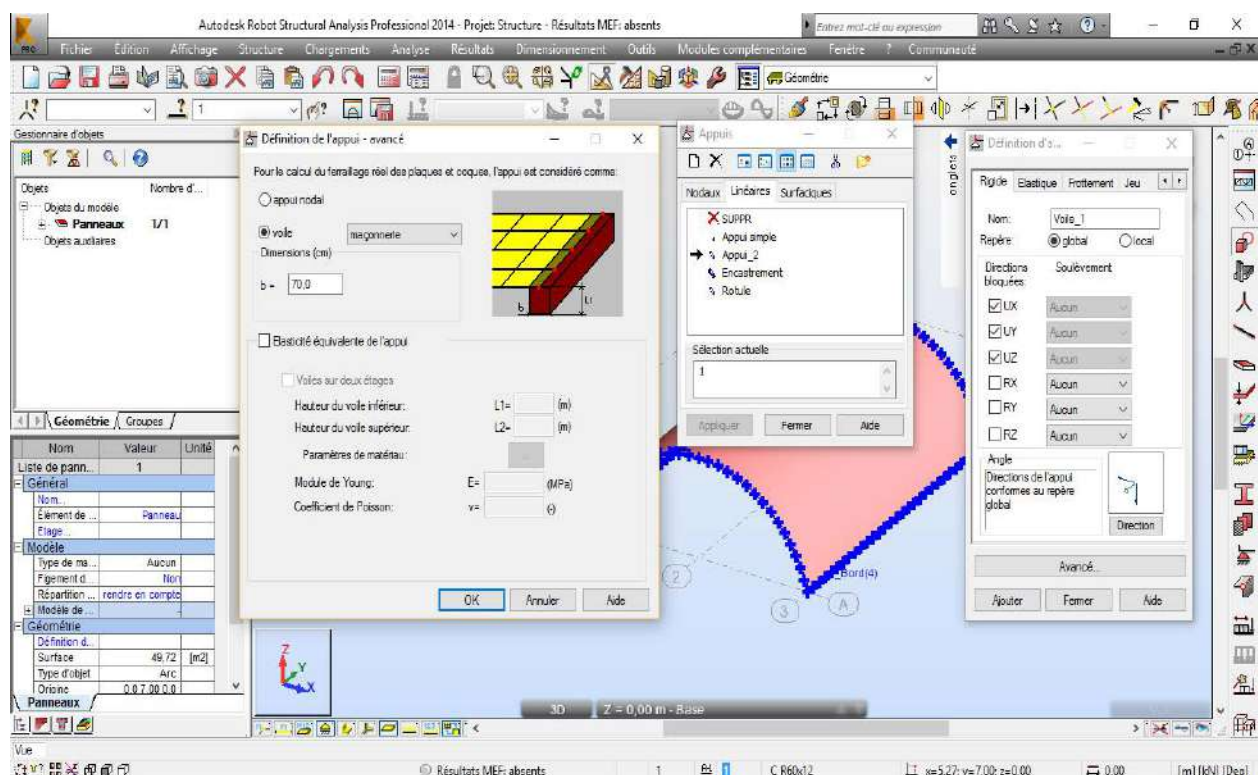


Image 4: Formation de l'arc

- ✓ Avec l'outil « Edition » cliquer sur « Extrusion » et mettre la division à 30 pareillement, puis forme le vecteur de translation de longueur 7m.

#### **Etape 4** : Appuis et maillage de la paroi de la voûte

- ✓ Cliquer sur appuis et sélectionner appuis linéaire puis aller sur « avancé » ensuite cliquer sur voile.
- ✓ Enfin sélectionner « maçonnerie ».



*Image 5: Appuis en maçonnerie*

- ✓ Définir l'épaisseur de la voûte en cliquant sur « Epaisseur EF »

Une fenêtre s'ouvre et nous donne la possibilité de choisir l'épaisseur et la nature du matériau que nous voulons utiliser.

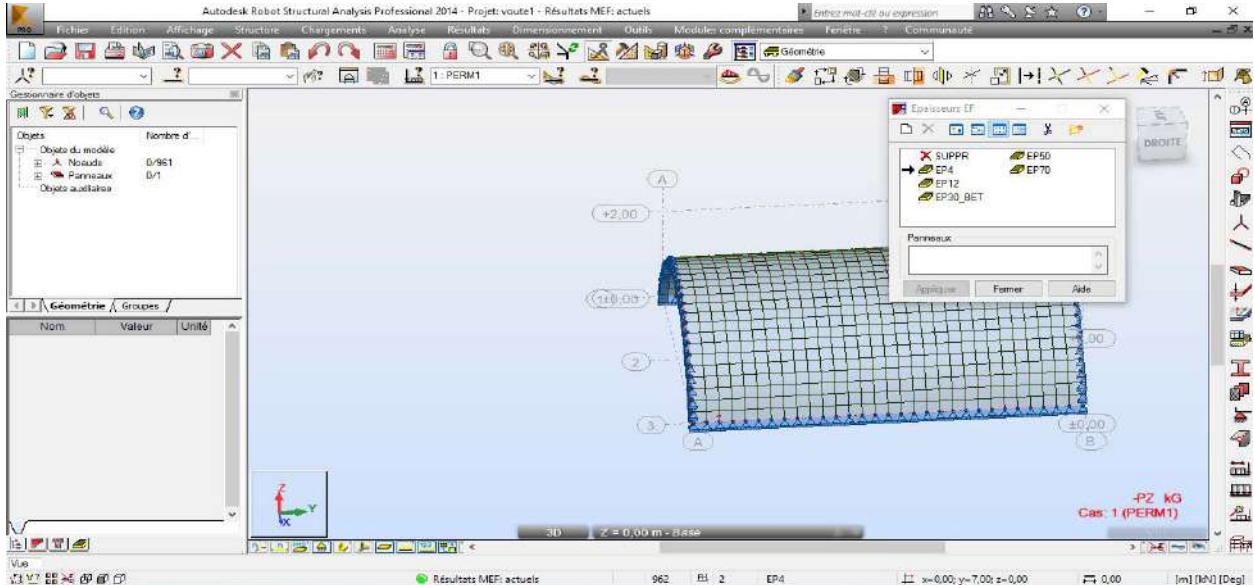


Image 6: Epaisseur de la voûte

✓ Maillage de la paroi de la voûte :

Cliquer sur « Options génération de maillage » puis sur « Option de maillage ». Il faut prendre à nouveau comme division 30, pour rester en cohérence avec la division appliquée à notre arc de départ.

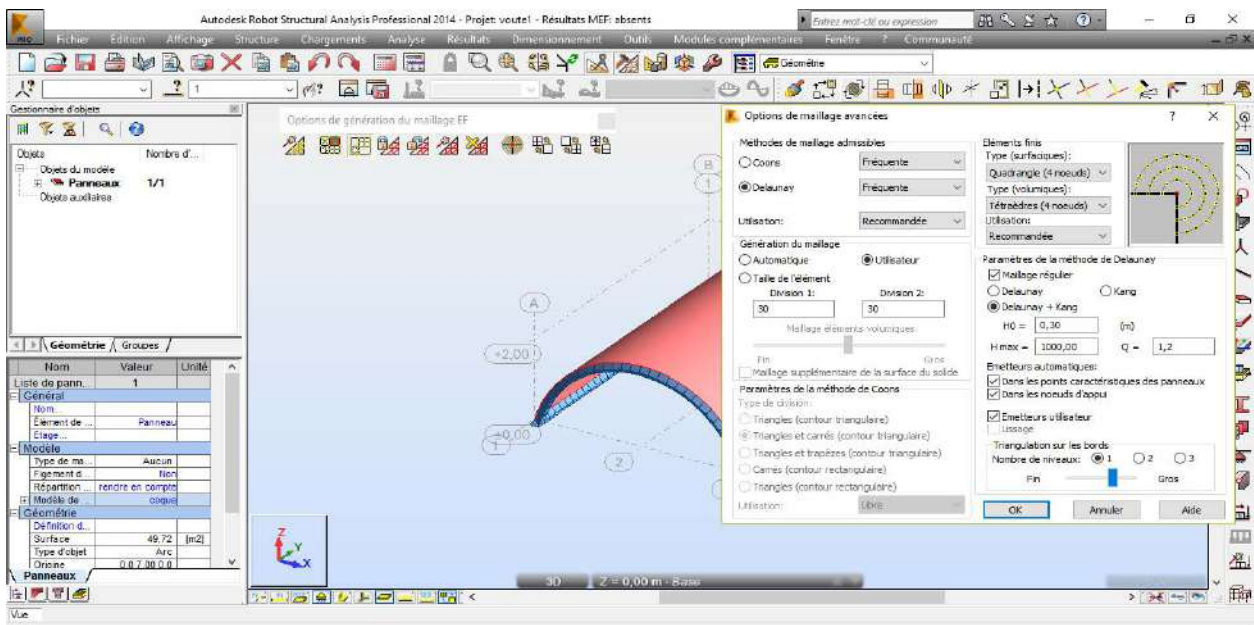


Image 7: Définition du maillage

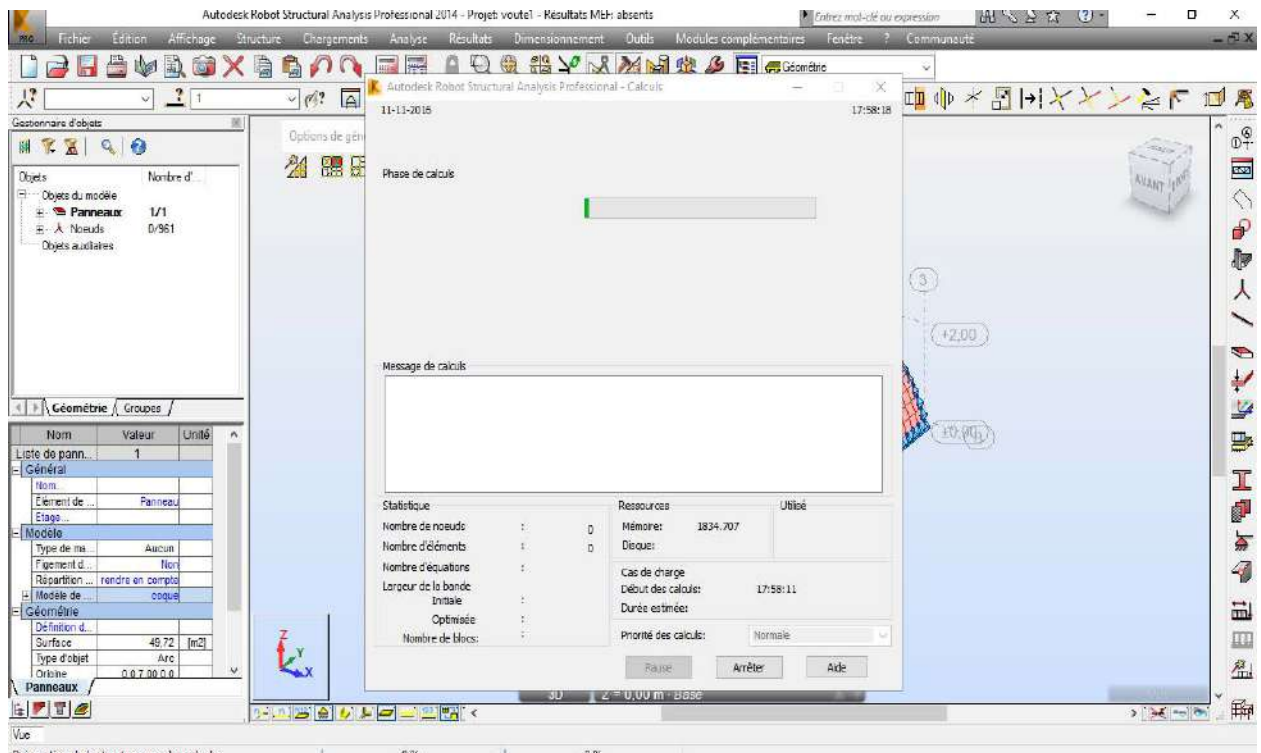


Image 8: Calcul de la voûte

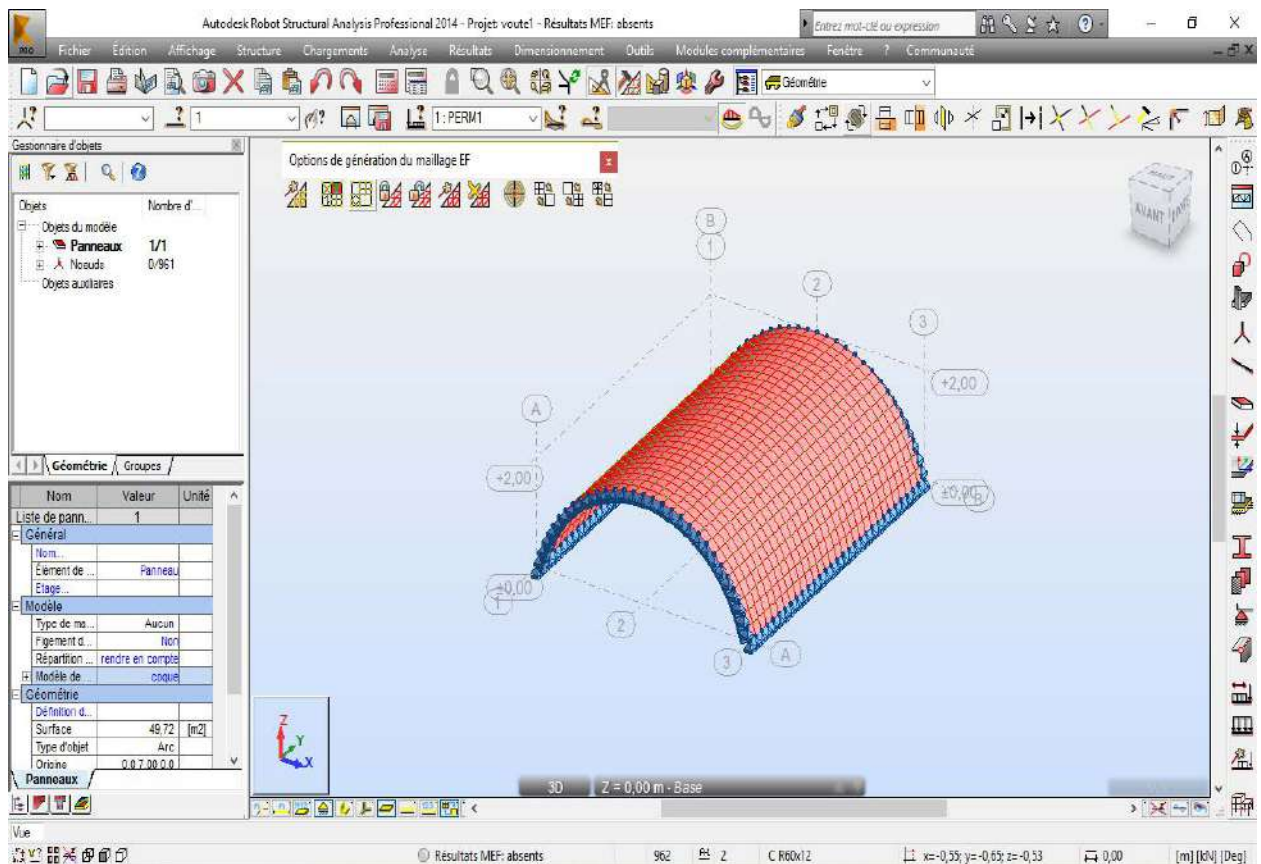


Image 9: Voûte maillée

✓ **Etape 5** : calcul et présentation des résultats

C'est le moment de lancer les calculs et de faire la lecture des résultats cartographiques. Pour se faire, il faut cliquer sur résultat une fois le calcul lancé et sélectionner « cartographes-panneaux... »

Les résultats seront présentés suivant les différents axes et par sollicitation : les contraintes normales, les efforts internes, les moments fléchissant, les contraintes de cisaillement, les efforts tranchants, les déplacements, les rotations, et la déformation de la structure.

Ainsi nous avons dans l'ordre :

✓ Les contraintes normales

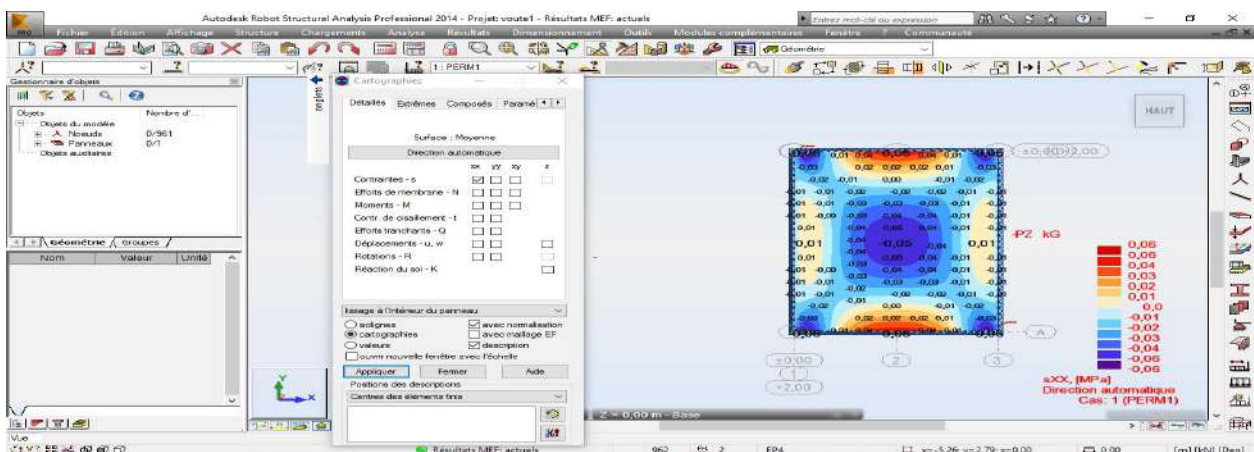


Image 10: Contrainte normale suivant l'axe x-x

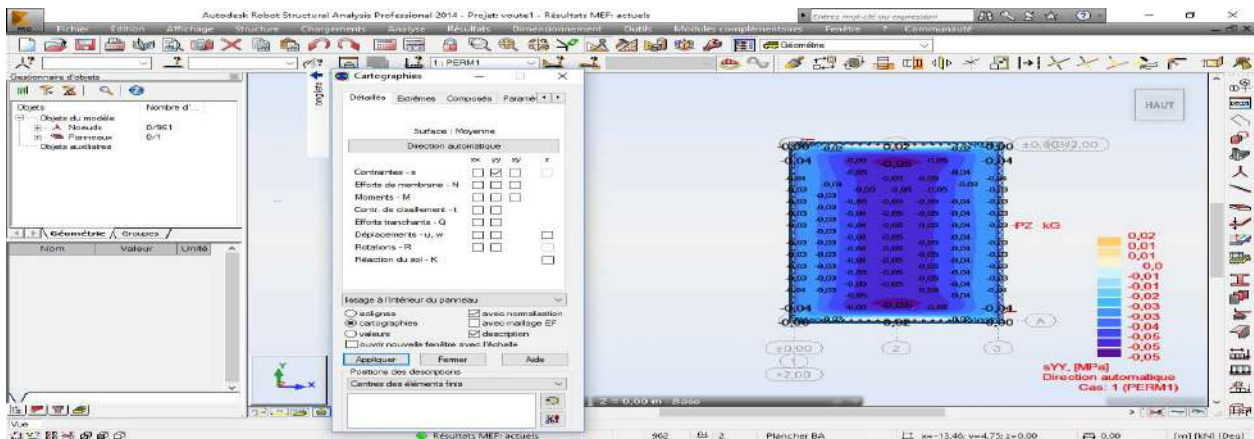


Image 11: Contrainte normale suivant l'axe y-y

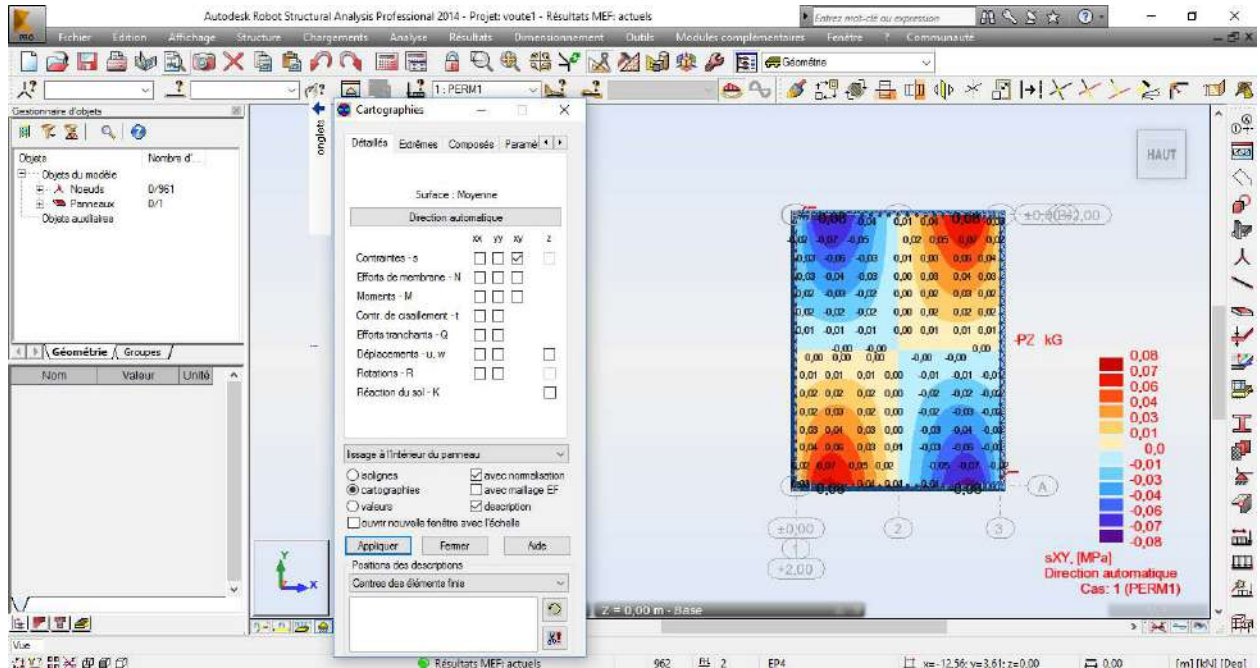


Image 12: Contrainte normale biaxiale

## ✓ Les efforts de membrane

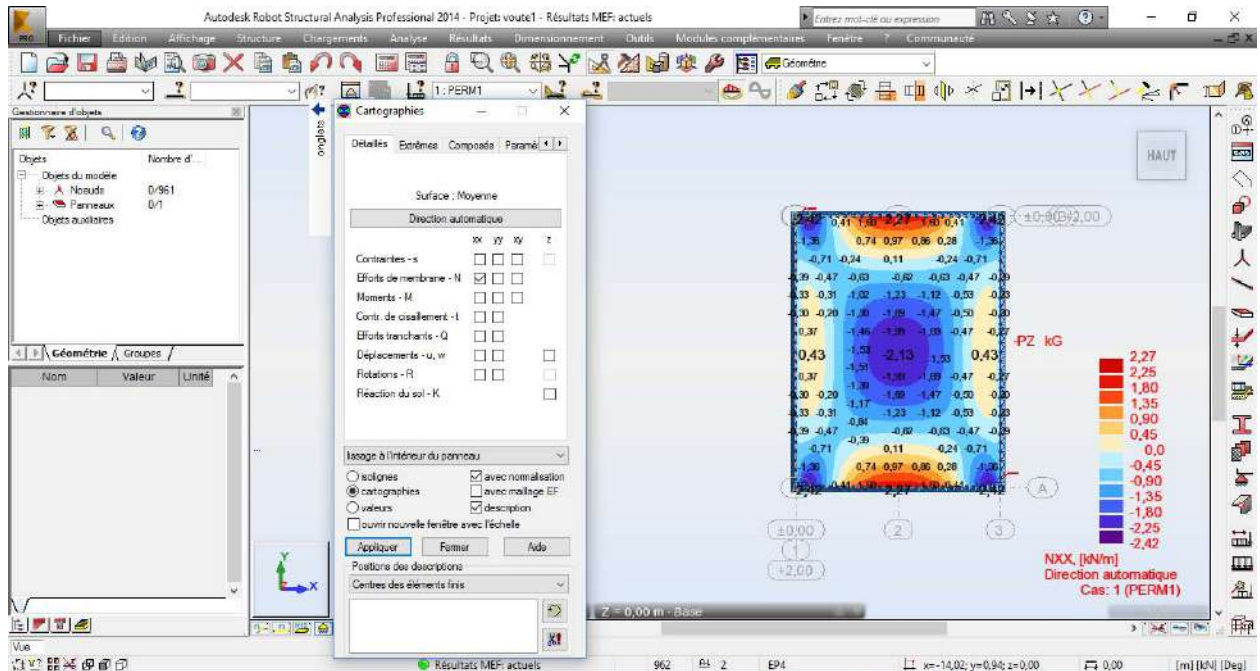


Image 13: Efforts de membrane suivant l'axe x-x

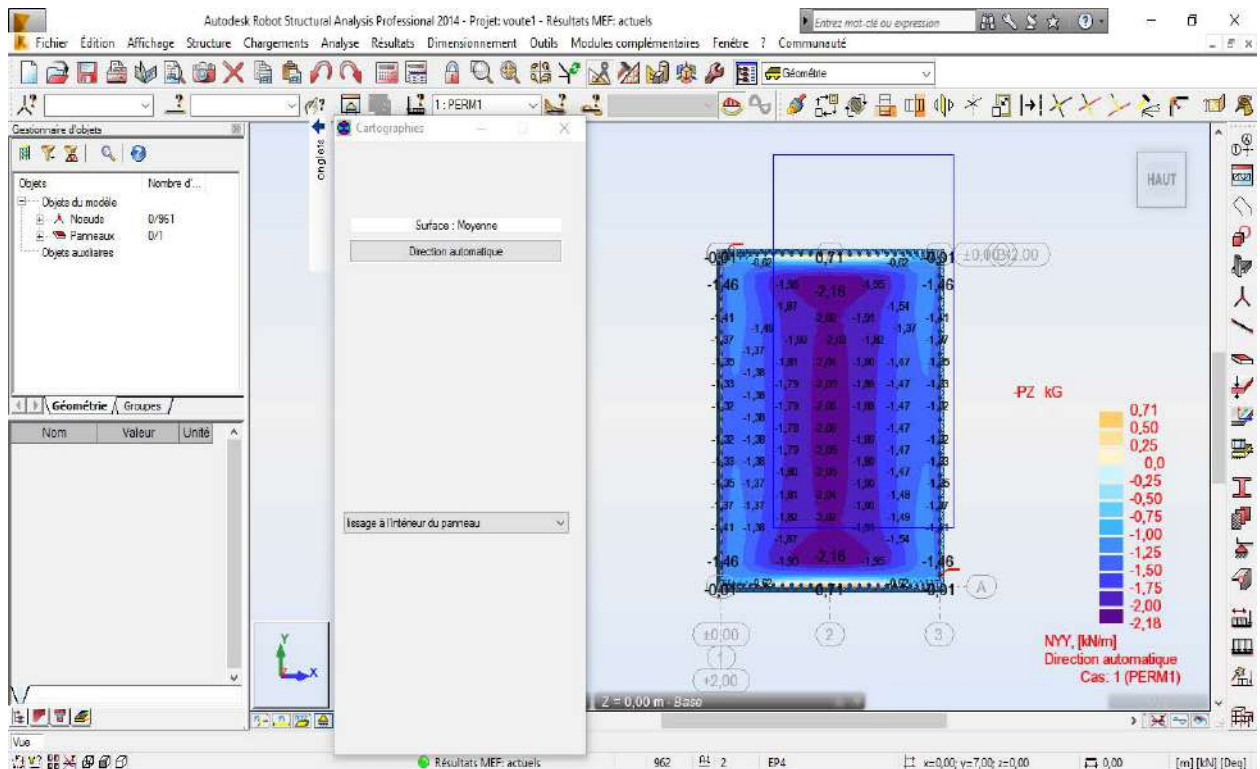


Image 14: Efforts de membrane suivant l'axe y-y

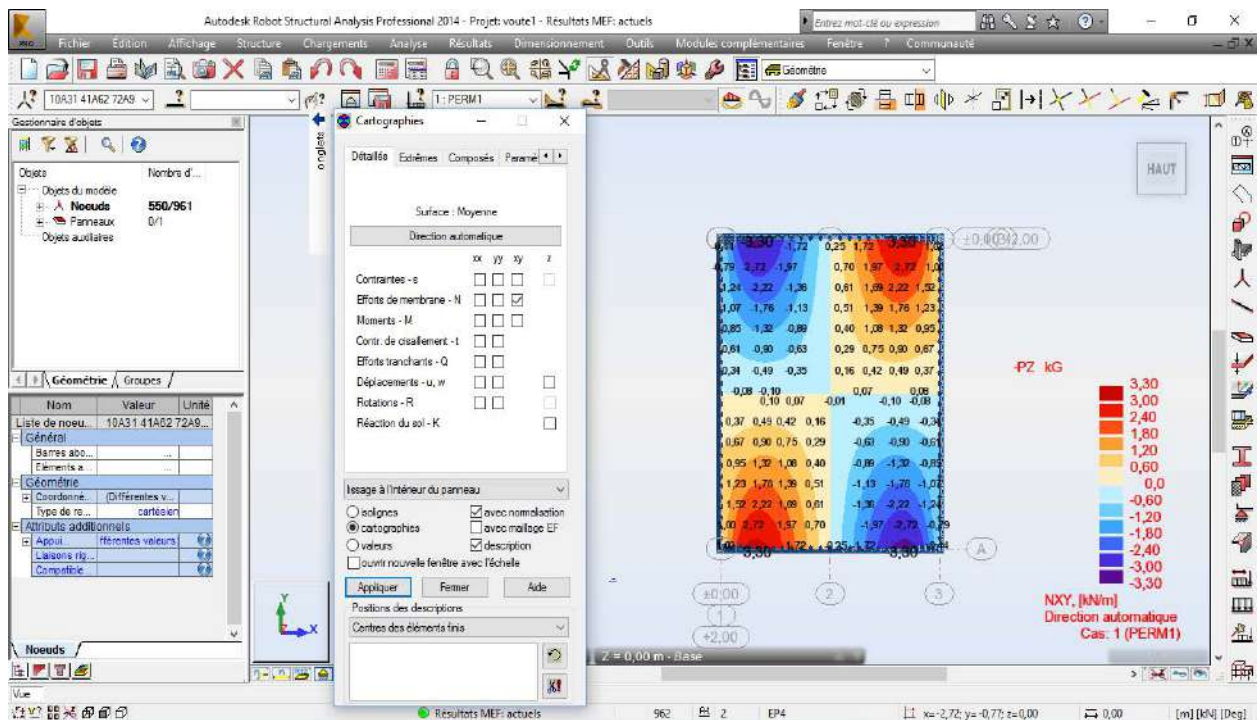


Image 15: Efforts de membrane suivant l'axe x-x

## ✓ Les moments fléchissant

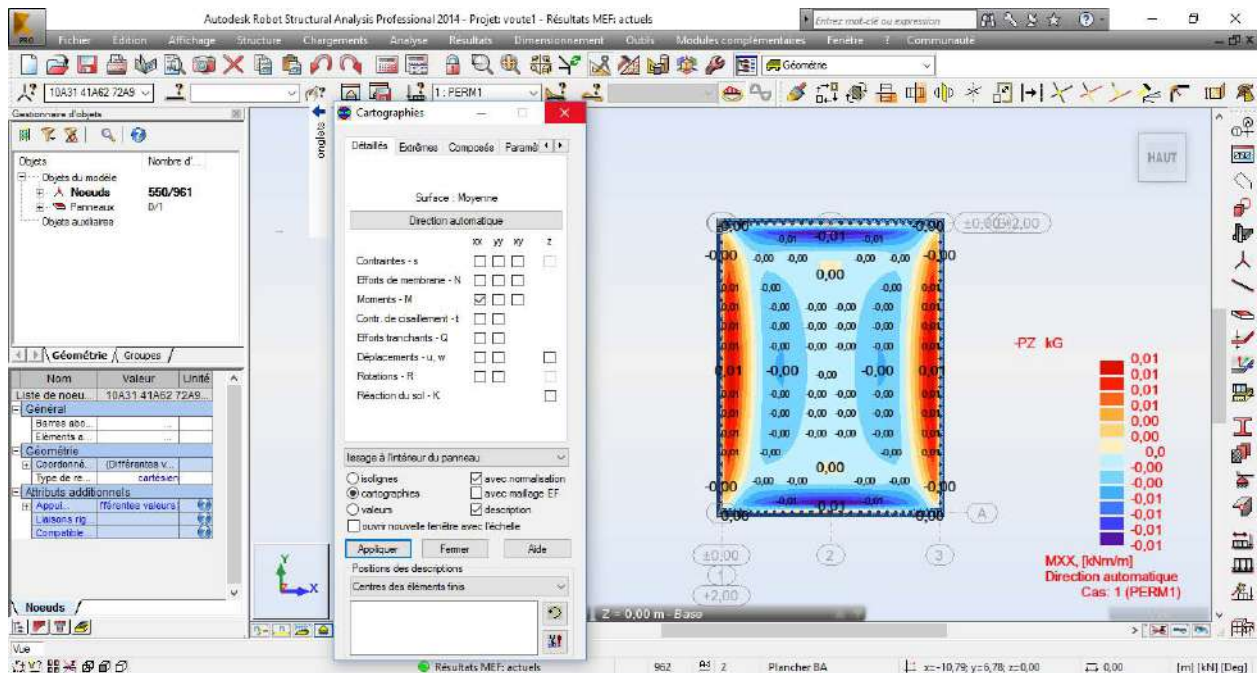


Image 16: Moments fléchissant x-x

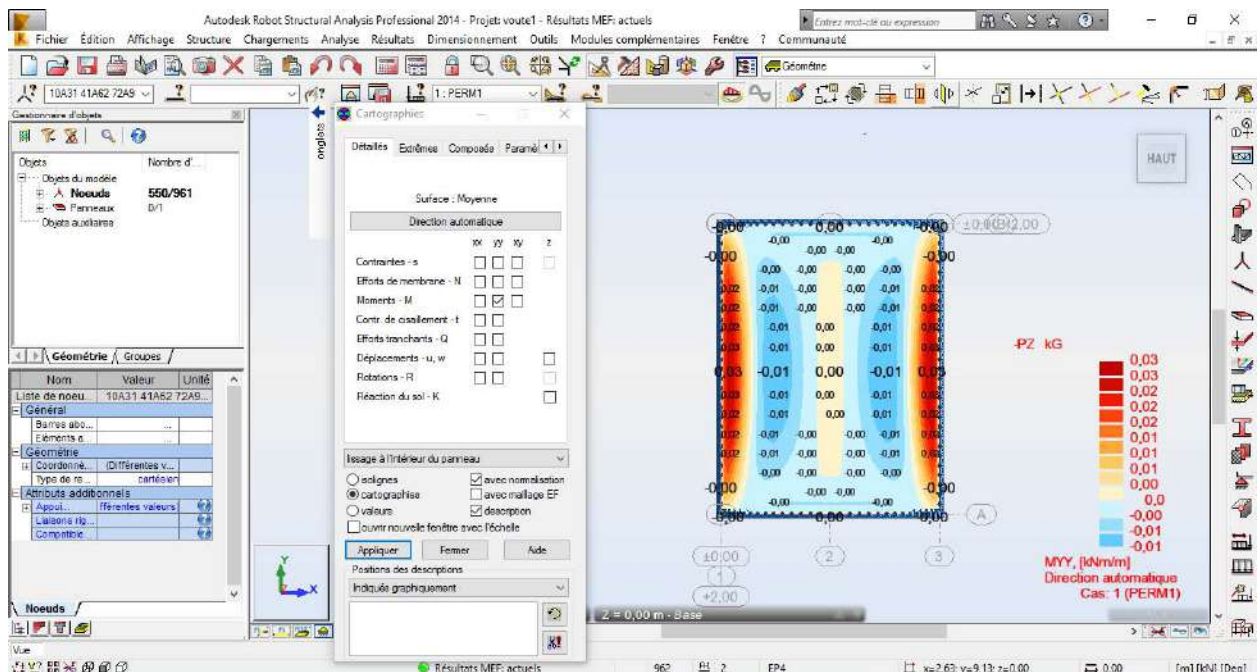


Image 17: Moments fléchissant y-y

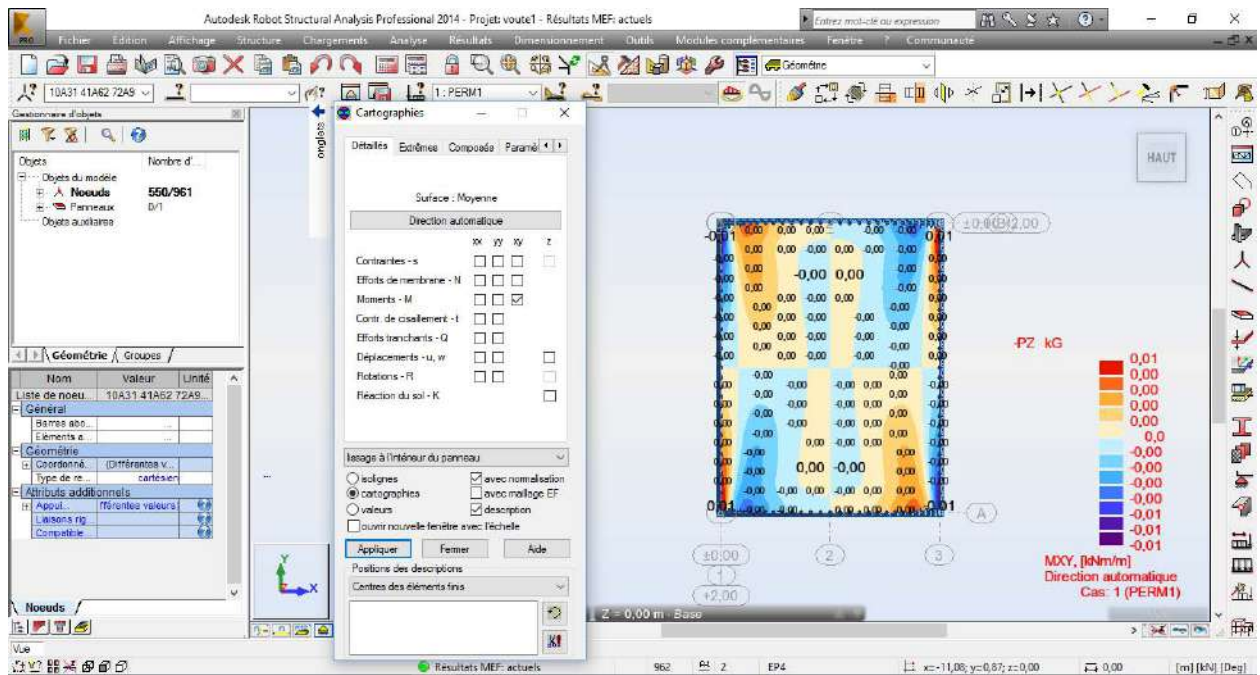


Image 18: Moments fléchissant x-y

## ✓ Les contraintes de cisaillement

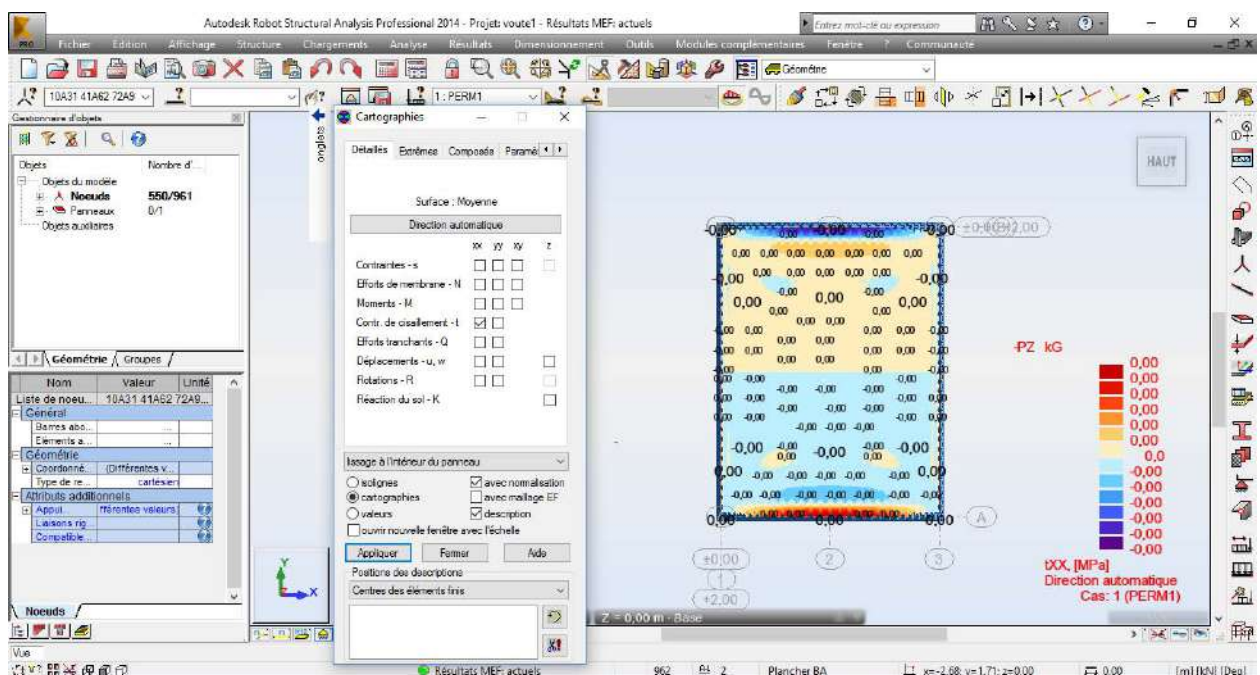


Image 19: Contrainte de cisaillement x-x

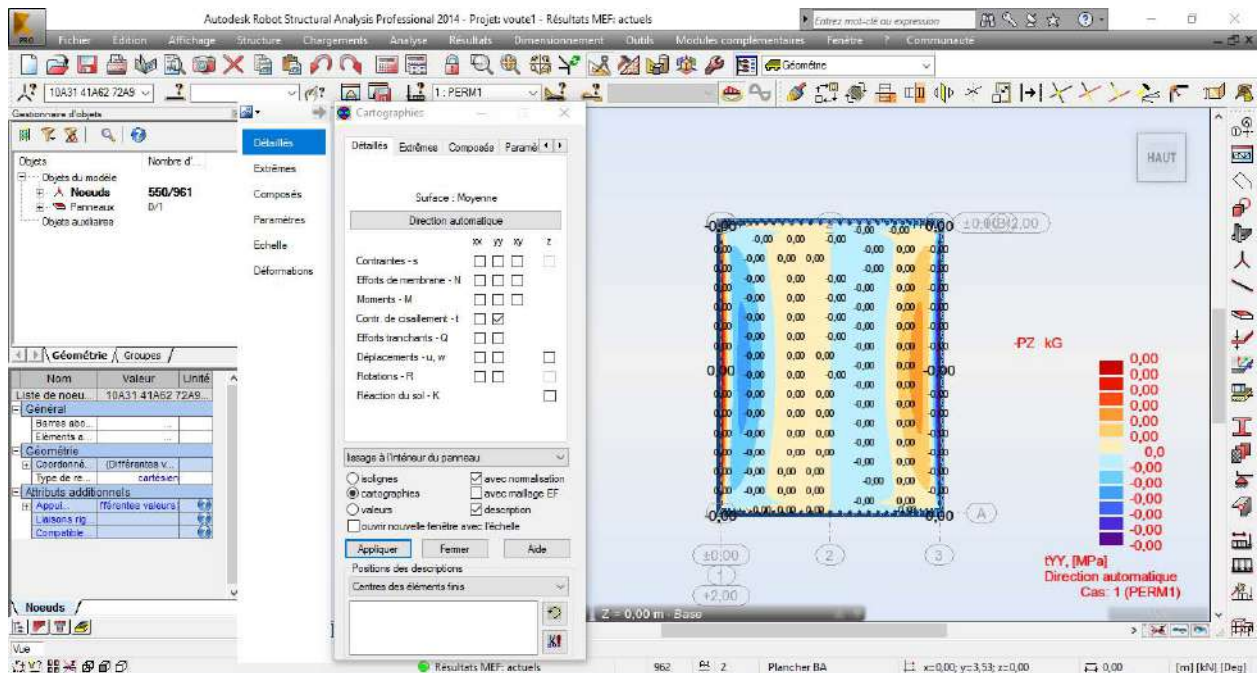


Image 20: Contrainte de cisaillement y-y

✓ Les efforts tranchants

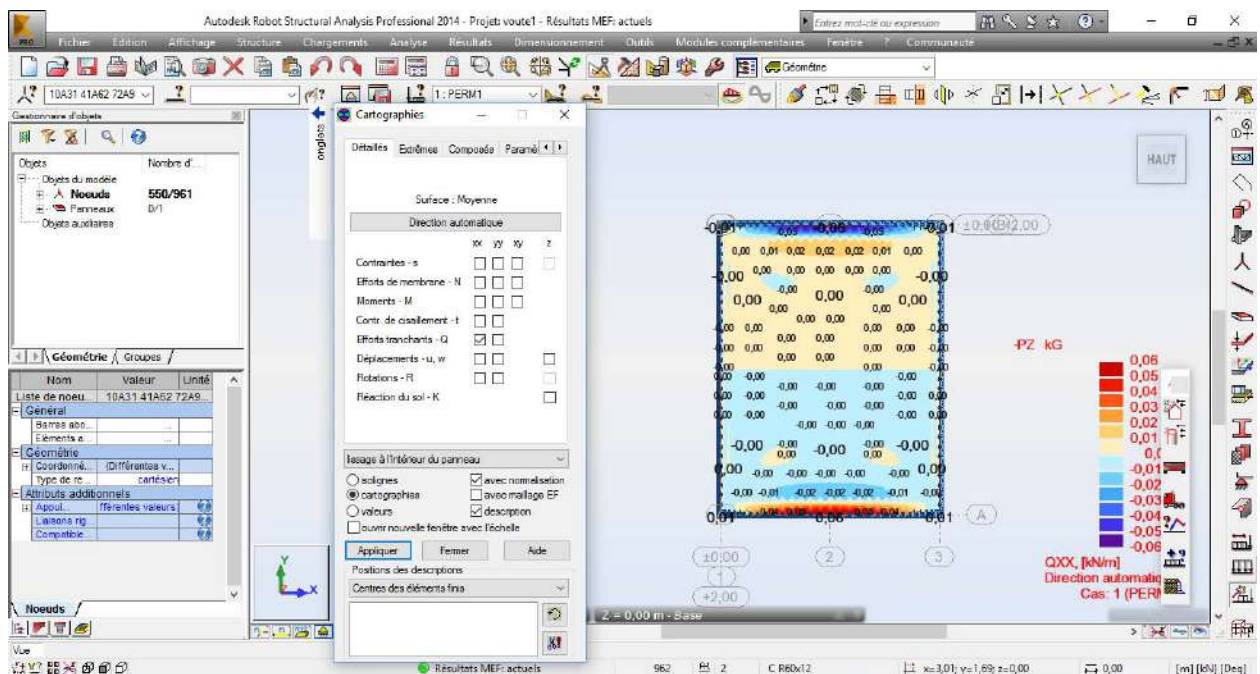


Image 21: Effort tranchants

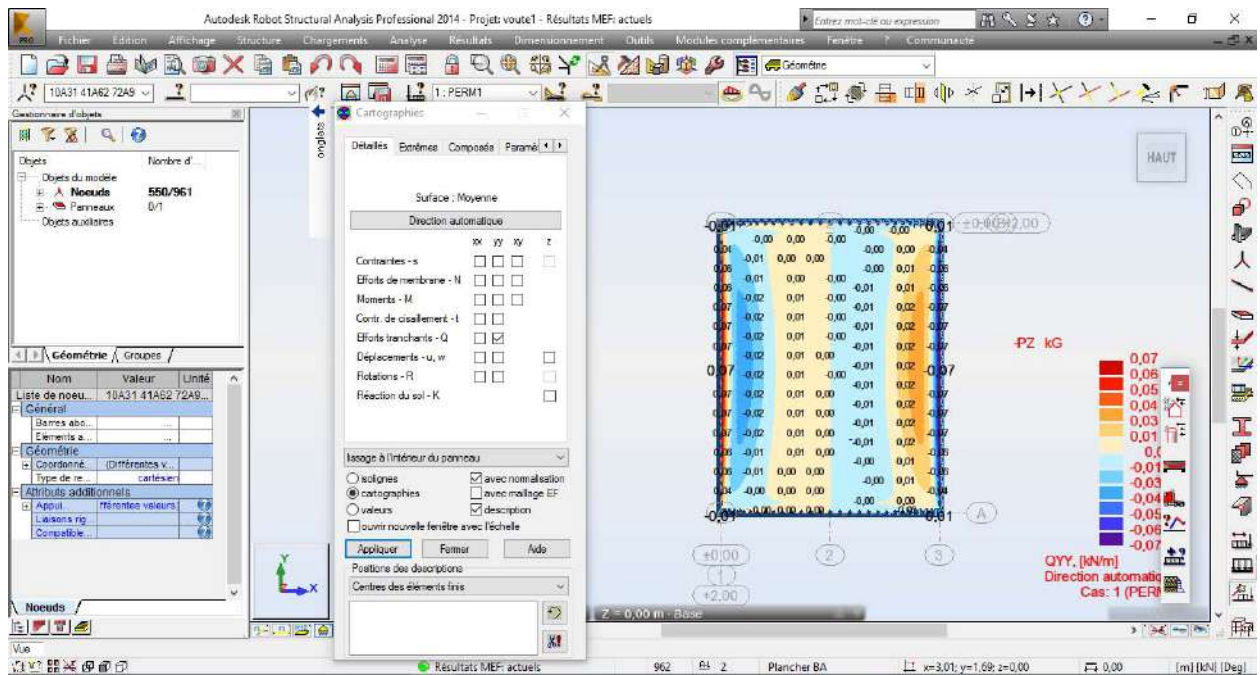


Image 22: Efforts tranchants y-y

## ✓ Les déplacements

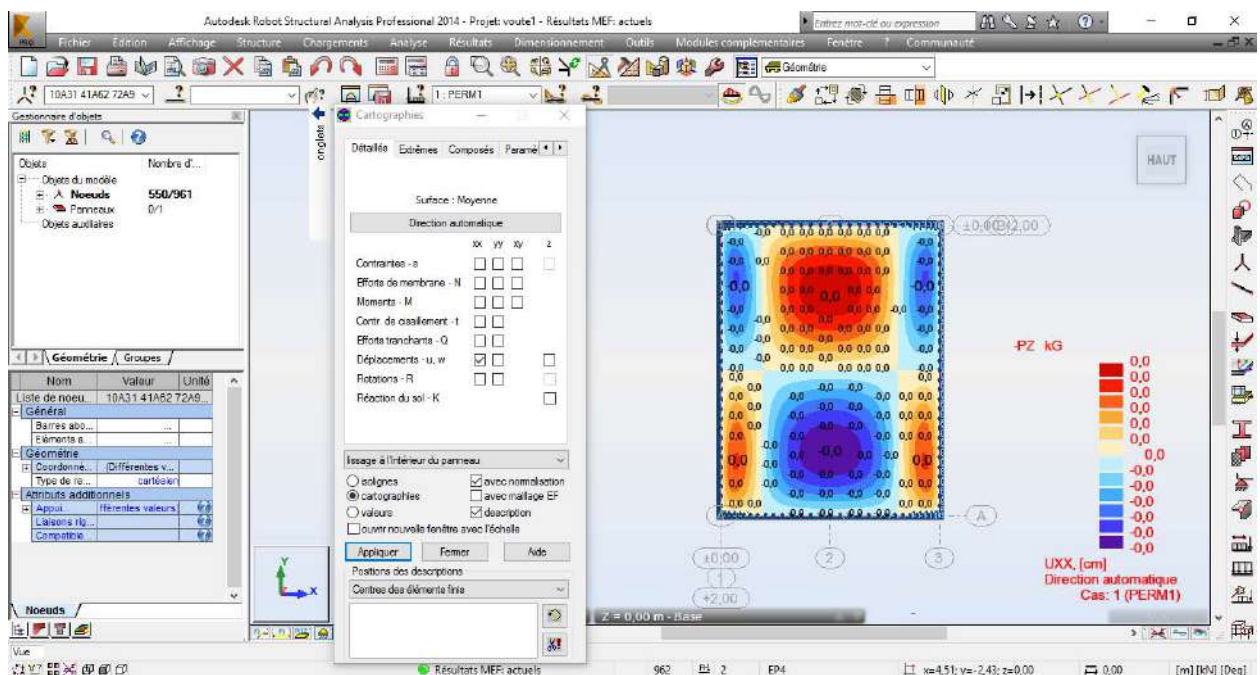


Image 23: Déplacement suivant l'axe x-x

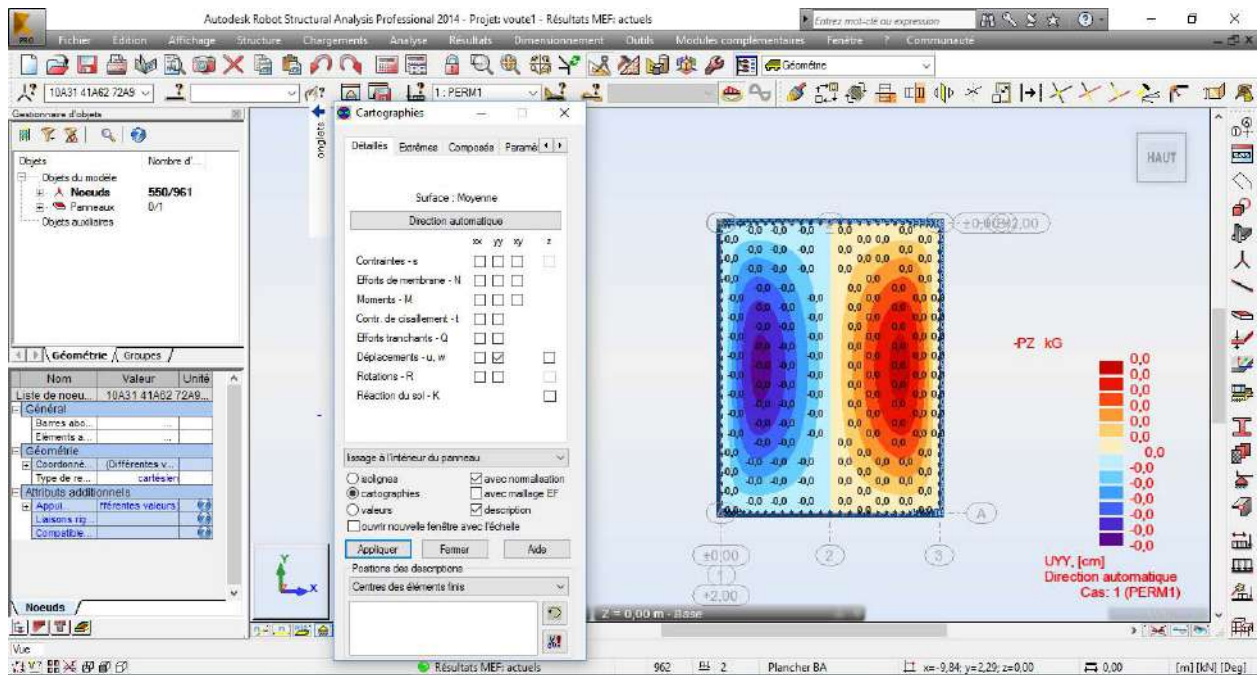


Image 24: Déplacement suivant l'axe y-y

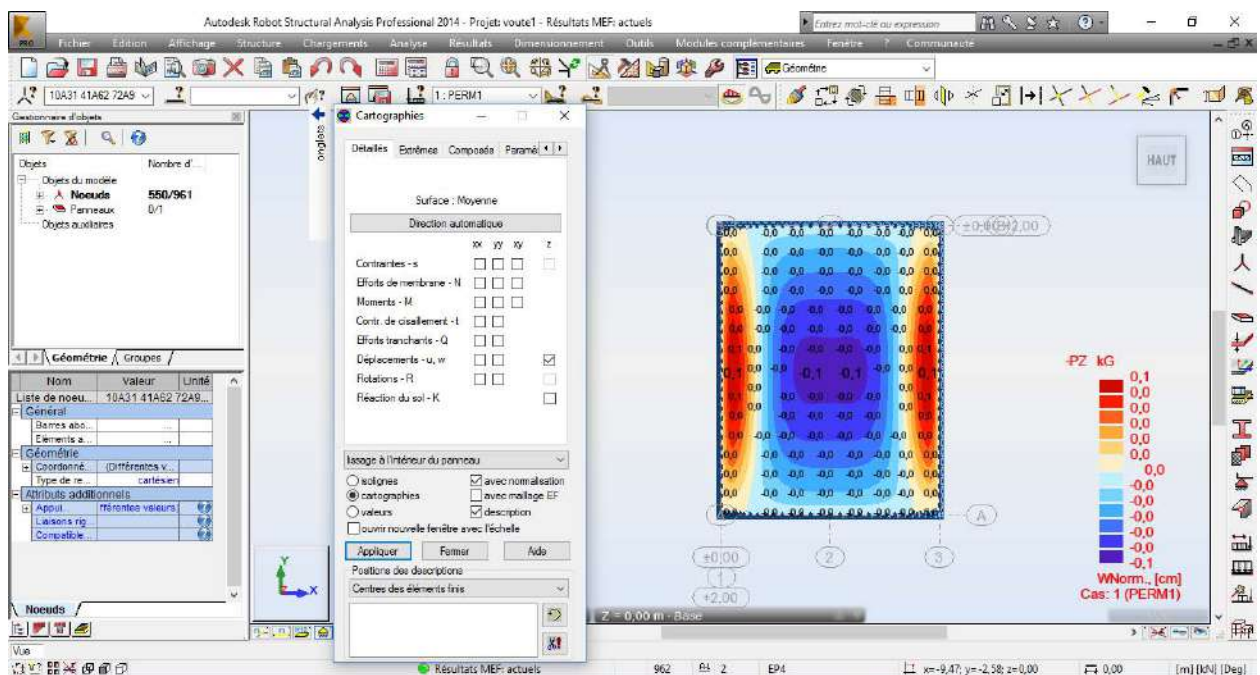


Image 25: Déplacement suivant l'axe z-z

## ✓ Les rotations

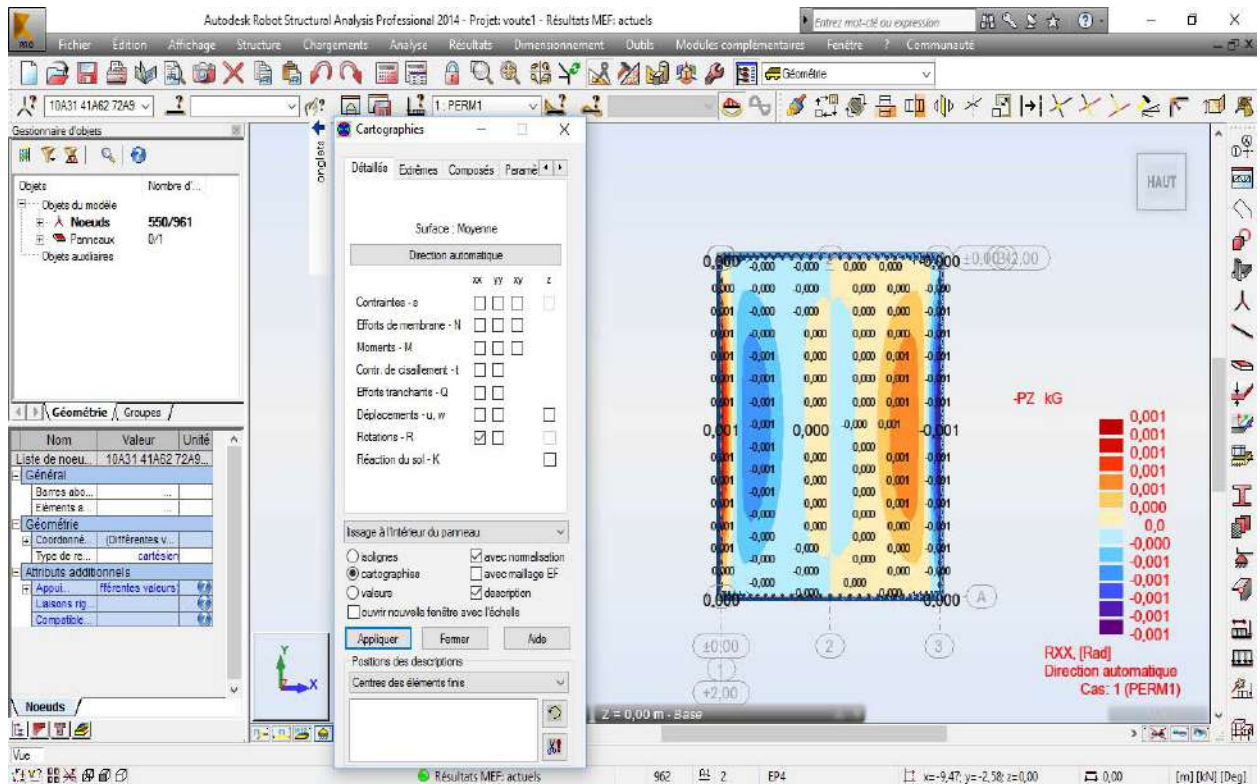


Image 26: Rotation autour de l'axe x-x

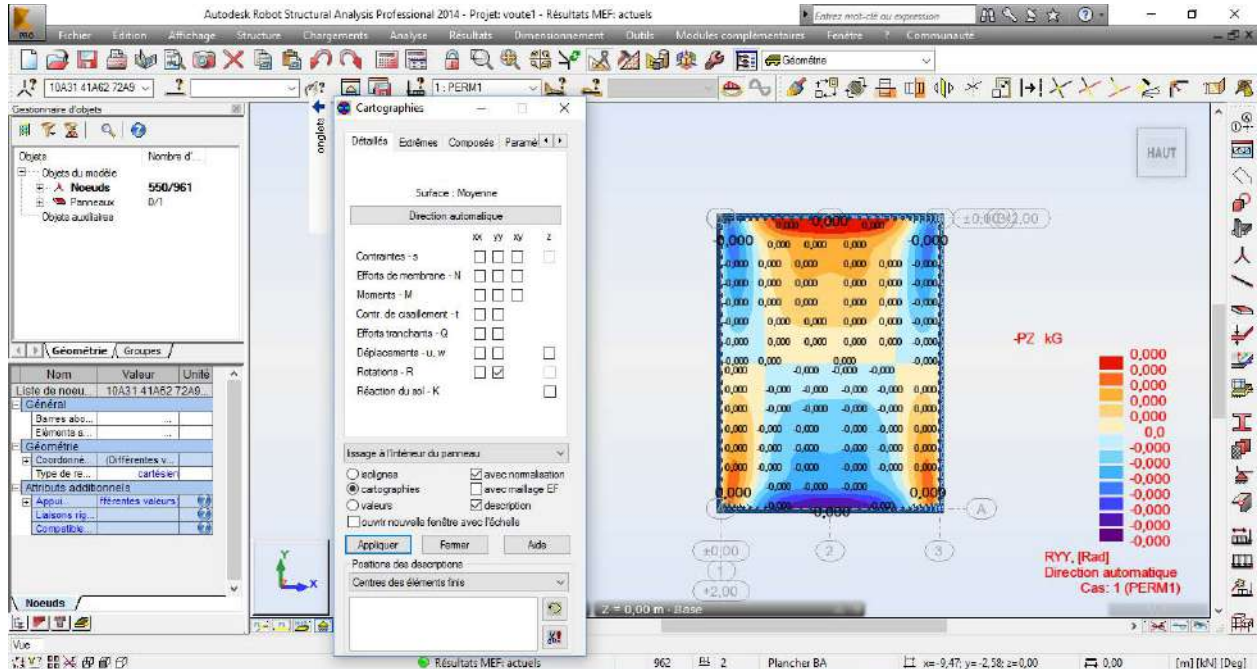


Image 27: Rotation autour de l'axe y-y

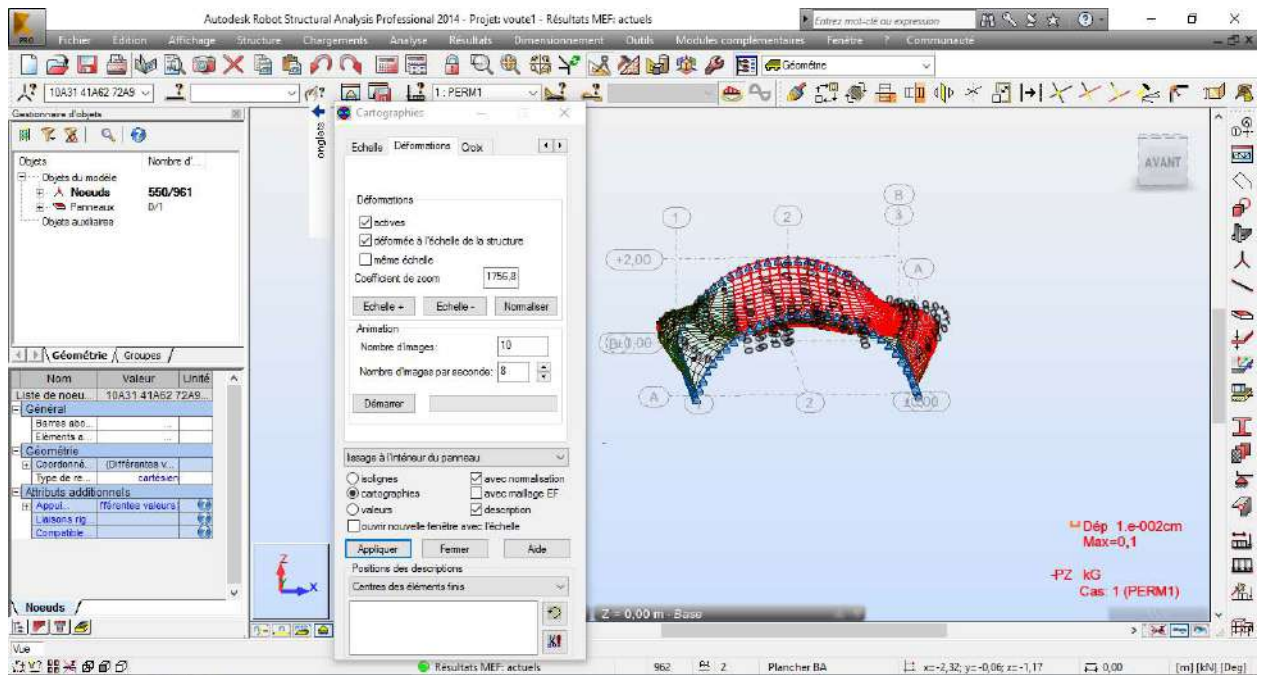


Image 28: Déformation de la voûte

### III- ANALYSE ET DISCUSSION

#### 3.1. Présentation des résultats

##### 3.1.1. Récapitulatif des calculs sur VSR et sur VAR

Tableau 7: Récapitulation 1

|            | Type de Charges appliquées             | Contraintes normales maximales | Réactions d'appuis                                                    | Observations                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------|----------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>VSR</b> | Poids propre uniquement                | 0,076 MPa                      | $R = 2,181 \text{ kN}$<br>avec une inclinaison $\alpha = 33,34^\circ$ | La poussée horizontale est trop élevée, impliquant une grande épaisseur pour les murs porteurs qui constituent les appuis principaux de la voûte.                                                                                                     |
| <b>VAR</b> | Poids propre + surcharge des remplages | 0,201 MPa                      | $R = 5,781 \text{ kN}$<br>avec une inclinaison $\alpha = 11,97^\circ$ | Réduction de la poussée horizontale grâce au surcharge du remplage qui a fait diminuer considérablement l'inclinaison des réactions de la voûte en tête des murs porteur long pan.<br><br>Cette technique permet de rigidifier la structure en voûte. |

NB :

- VSR : Voûte sans remplage
- VAR : Voûte avec remplage

- Les contraintes dans les deux cas sont inférieures à la contrainte admissible égale à  $\sigma = 3,34 \text{ MPa}$

### 3.1.2. Récapitulatif des calculs des contraintes normales dans les murs porteurs

Tableau 8: Récapitulation 2

| 1.1.1                           | Contraintes |            | Epaisseurs | Coefficients de sécurité |                |
|---------------------------------|-------------|------------|------------|--------------------------|----------------|
|                                 | De calcul   | Admissible |            | $\gamma_{transl}$        | $\gamma_{rot}$ |
| <b>Mur porteur<br/>Pour VSR</b> | 0,180 MPa   | < 3,34 MPa | 50 cm      | 0,76 < 1,5               | 0,84 < 1,5     |
| <b>Mur porteur<br/>Pour VAR</b> | 0,207 MPa   |            | 50 cm      | 2,36 > 1,5               | 1,22 < 1,5     |
|                                 |             |            | 70 cm      | 2,36 > 1,5               | 1,53 > 1,5     |

NB : c'est avec un épaisseur de 70 cm que la stabilité est assurée pour la structure de voûte nubienne avec remplage.

### 3.1.3. Récapitulatif du résultat de la modélisation d'une VSR dans Robot comparé au calcul analytique

Tableau 9: Récapitulation 3

|                                   | Résultats par calcul | Résultat fourni par robot |
|-----------------------------------|----------------------|---------------------------|
| Contrainte maximale (MPa)         | 0,076                | 0,05                      |
| Effort normal maximal (kN)        | 2,181                | 2,18                      |
| Moment fléchissant maximal (kN.m) | 0                    | 0,03                      |
| Effort tranchant maximal          | 0                    | 0,07                      |
| Déplacement maximal (cm)          | —                    | 0,0                       |

|  |
|--|
|  |
|--|

|                                          |                      |                     |
|------------------------------------------|----------------------|---------------------|
| Contrainte de cisaillement maximal (MPa) | –                    | 0,00                |
| Rotation maximal (rad)                   | –                    | 0,000               |
| Déformation maximale (cm)                | –                    | 0                   |
| Stabilité de la Paroi de la voûte        | 0,076 MPa < 3,34 MPa | 0,05 MPa < 3,34 MPa |

### 3.2. Discussion

Tableau 10: Tableau montrant la variation de la flèche en fonction de « a »  $a=\{-3;-2;-1\}$

| a                   | -3     | -2      | -1          |
|---------------------|--------|---------|-------------|
| x                   | 2,63   | 2,63    | 2,63        |
| y                   | -4,23  | -4      | -7          |
| Flèche (en m)       | 1,23   | 2       | 6           |
| Surbaissement       | 0,234  | 0,380   | 1,141       |
| Poussée horizontale | Grande | Moyenne | Négligeable |

À portée égale, on observe un fort surbaissement de la chaînette induisant de grande poussée horizontale pour une valeur de  $a = -3$

la chaînette est très rehaussée avec des poussée horizontales négligeables avec la valeur de  $a = -1$

Par contre nous obtenons une chaînette optimale pour une flèche est égale à « a » avec une poussée moyenne lorsque la valeur de  $a = -2$

Ce qui confirme l'une des propriétés liées à la théorie de la chaînette qui stipule que lorsque la flèche est égale à «  $a$  », en valeur absolue on obtient une chaînette optimale.

D'où le tableau suivant montrant, pour différentes constantes «  $a$  », un surbaissement égal à 0,380 lorsque la valeur de la flèche est égale à «  $a$  » en valeur absolue.

|  |
|--|
|  |
|--|

Tableau 11: Tableau montrant la variation de la Portée en fonction de « a »  $a=\{-3;-2;-1\}$

| <b>a</b>                       | <b>-3</b>      | <b>-2</b>      | <b>-1</b>      |
|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>Demie portée<br/>(x)</b>    | 3,951          | 2,63           | 1,32           |
| <b>Y(x)</b>                    | -6             | -4             | -2             |
| <b>Flèche (en m)</b>           | 3              | 2              | 1              |
| <b>Surbaissement</b>           | <b>0,380</b>   | <b>0,380</b>   | <b>0,380</b>   |
| <b>Poussée<br/>horizontale</b> | <b>Moyenne</b> | <b>Moyenne</b> | <b>Moyenne</b> |

On retiendra donc que pour l'optimisation de la portée de la voûte nubienne il est nécessaire que sa flèche soit égale à la valeur de la constante « a » en valeur absolue :

$$flèche = a$$

Retenons que la recherche de la portée maximale de la voûte nubienne, toujours avec la théorie de la chaînette et surtout en tenant compte des conditions aux états limites était l'idée première qui a suscité l'effectivité de cette recherche. Mais très tôt nous nous sommes rendus compte qu'en réalité nous ne pouvons pas parler de portée maximale puisque les deux variables qui influencent le choix de la portée ne peuvent pas être limitées à un seuil infranchissable. En effet nous pouvons aller au-delà des valeurs que l'AVN a fixé comme limite en ce qui concerne la portée de la voûte car des risques de ruine de l'ouvrage seront très grand.

A travers cette ébauche, nous sommes convaincus que même au-delà d'une certaine valeur nous pouvons continuer à assurer la stabilité de notre structure sans la présence de désordres assez nuisible pour la voûte nubienne à condition que la condition selon laquelle :

$$flèche = |a|$$

Cependant la mise en œuvre de pareil voûte peut nécessiter la qualification de la main d'œuvre. Néanmoins on observera aucune modification particulière dans les dispositions techniques de mise en œuvre.

Telle que la modélisation de la voûte a été exécutée, et selon les considérations liées à sa mise en œuvre sans coffrage, les seuls appuis, les murs « long pan », ne suffiront pas à établir l'équilibre statique de l'ensemble de la structure. Il était nécessaire que d'autre appuis soient pris en compte ; et dans notre cas de figure, les appuis supplémentaires, indispensables à la stabilité de la voûte, sont les murs « pignons ».

De ce fait la charge totale de la voûte y-compris celle du remplage seront désormais répartir entre les murs « porteur » et les murs « pignons ».

Cependant la simulation par la théorie de la chaînette n'a pas tenu compte des appuis secondaire (murs pignon). La modélisation de la voûte nubienne au moyen du logiciel Robot avait permis de prendre en considération cette observation en faisant appuyer la voûte sur ces quatre appuis. Par ailleurs, dans cette modélisation nous remarquons que la seule sollicitation dans la paroi de la voûte

nubienne est la compression simple avec un moment et des efforts tranchants négligeables devant les efforts normaux dans la voûte nubienne. Il devient clair que malgré que cette forme de modélisation présente de limite du point de vue de l'appareillage des voussoirs, les résultats qui y sont présentés, sont très proche des résultats du calcul analytique. Mais il ne suffisait pas seulement de dimensionner la structure d'un ouvrage pour s'assurer de sa stabilité. Il était nécessaire de vérifier la rigidité de l'ouvrage de façon général et plus encore pour les structures en voûte dont la rigidification demeure indispensable pour leur stabilité. Il existe plusieurs systèmes de rigidification des structures en voûte ou en arc, mais dans le cas de la voûte nubienne, nous avons adopté le comble du remplage.

## CONCLUSION

La théorie de chaînette, dans l'étude portée sur la voûte nubienne, nous a permis de comprendre que l'allure idéale de la voûte nubienne est celle de la chaînette renversée. Et ce n'est comme cela que nous pouvons assurer dans les parois de la voûte une unique sollicitation : celle de la compression simple.

Pour illustrer les efforts de compression, nous nous sommes servis du polygone funiculaire pour établir la ligne des pressions dans la paroi de la voûte nubienne sous l'action complémentaire de son propre poids et la surcharge du comble du remplage.

Dans la suite de cette étude, nous sommes parvenus à déterminer que l'une des possibilités pour résoudre le problème de la poussée horizontale en tête des murs porteurs. Dans une étude antérieure, l'ingénieur Aquilas posait comme hypothèse qu'en améliorant les caractéristiques mécaniques du banco, qu'on pouvait optimiser la portée de la voûte nubienne ; mais à l'issue de cette étude, nous réalisons que l'optimisation de la portée de la voûte nubienne est rendue possible lorsque :

$$flèche = |a|$$

Il est clair, que nous pouvons franchir de grande portée avec la construction en voûte nubienne lorsque nous satisfaisons à la condition d'optimisation de la portée de la voûte telle qu'elle vient d'être présentée. Il serait intéressant, dans le cadre d'approfondir nos connaissances sur cette technique de construction, d'envisager des études complémentaires qui traiteront du confort thermique et de l'évaluation des déformations dues aux

phénomène du fluage de la terre de barre dans les structures en voûte nubienne.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] François CHATILLON (2014), Eglise SAINT AMAND-SUR-FION, étude préalable-stabilité des voûtes, 48p.
- [2] J. DUPUIT (1870), Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie, Paris. DUNOD, 404p.
- [3] BARBOTIN Baptiste (2007), Stabilité des constructions en pierre : le cas des voûtes, mémoire présenté pour le brevet de technicien supérieur, Métiers de la pierre, 70p.
- [4] BUISSON Amélie (2012), Vernacular, terre crue : la voûte nubienne, Bachelor semestre 6, 16p.
- [5] COCCO Christelle, DAUPHIN Raphael, Ganour Karim (2006), Voûte nubienne au Burkina Faso, Projet de semestre, 52p.
- [6] GRANDJEAN Alix (2010), capacité portante de pont en arc en maçonnerie de pierre naturelle-model d'évaluation intégrant le niveau d'endommagement, thèse n°4596, présentée le 11 février 2010 à la FACULTÉ ENVIRONNEMENT NATUREL, ARCHITECTURAL ET CONSTRUIT LABORATOIRE DE MAINTENANCE, CONSTRUCTION ET SÉCURITÉ DES OUVRAGES
- [7] PROGRAMME DOCTORAL EN STRUCTURES, à ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE pour l'obtention du grade de docteur en sciences, 318p.
- [8] ADAGBE Mariette, 2014. Caractérisation physique mécanique et thermique du matériau banco de grenier en vue de son utilisation dans les blocs de construction : Mémoire de fin de formation pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur de Conception en Génie Civil/ EPAC/ UAC– Bénin, 158p.

- 
- [9] AMBARKA Issakou, 2010. Caractéristiques physico-mécaniques du matériau banco et vérification de la résistance portante mécanique des greniers en terre dans le nord du Bénin, Mémoire d'ingénieur de conception en Génie Civil/ Institut International d'Ingénierie de l'Eau et de l'Environnement. - Ouagadougou, Burkina Faso, 94p.
  - [10] PADONOU Florent Aquilas (2016), Modélisation et simulation par éléments finis de la paroi d'une toiture en voûte nubienne sans coffrage ni armatures, Mémoire de fin de formation pour l'obtention du Diplôme de Master Professionnel en Génie Civil/ ESGC VÉRÉCHAGUINE A. K. - Cotonou – Bénin, 115p.
  - [11] SMARS Pierre (2000), Etude sur la stabilité des arcs et voûtes : confrontation des méthodes de l'analyse limite aux voûtes gothiques en Brabant, thèse présentée en vue de l'obtention du titre de Docteur en science appliquée, LEUVEN mars 2000, 245p.
  - [12] FREY François, Analyse des structures et milieux continus : statique appliquée, PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES, 2<sup>ème</sup> Edition, 256p.

|  |
|--|
|  |
|--|

## TABLE DES MATIERES

|                                                                                 |       |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------|
| FICHE DE CERTIFICATION DE L'ORIGINALITE DU MEMOIRE .....                        | iii   |
| FICHE DE CERTIFICATION DES CORRECTIONS DU MEMOIRE.....                          | v     |
| SOMMAIRE .....                                                                  | vii   |
| DEDICACE.....                                                                   | xi    |
| AVANT PROPOS .....                                                              | xii   |
| REMERCIEMENT.....                                                               | xiv   |
| RESUME.....                                                                     | xvi   |
| ABSTRAT .....                                                                   | xvii  |
| LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS.....                                         | xviii |
| SYMBOLES .....                                                                  | xviii |
| ABREVIATIONS.....                                                               | xxii  |
| LISTE DES FIGURES .....                                                         | xxiii |
| LISTES DES IMAGES .....                                                         | xxiv  |
| LISTE DES TABLEAUX .....                                                        | xxvi  |
| INTRODUCTION GENERALE .....                                                     | 27    |
| CHAPITRE 1 : METHODOLOGIE DE RECHERCHE ET GENERALITE SUR LA VOÛTE NUBIENNE..... | 29    |
| I- METHODOLOGIE DE RECHERCHE ET HYPOTHESES DE CALCUL .....                      | 29    |
| 1.1 Démarche méthodologique de l'étude .....                                    | 29    |
| 1.2 Matériels de l'étude et hypothèses de calcul.....                           | 30    |
| II- JUSTIFICATION ET OBJECTIFS DE L'ETUDE .....                                 | 33    |
| 2.1. Contexte et justification de l'étude.....                                  | 33    |
| 2.2. Objectif général .....                                                     | 34    |
| 2.1.1 Objectifs spécifiques .....                                               | 34    |
| 2.1.2 Les résultats attendus.....                                               | 35    |
| III- SYNTHESE SUR LA TECHNIQUE DE LA VOÛTE NUBIENNE .....                       | 36    |
| 3.1 Origine et historique de la voûte nubienne .....                            | 36    |
| 3.2 Revue bibliographie sur la voûte nubienne .....                             | 38    |

|                                                                     |                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                     |                                                                                   |
| 3.3                                                                 | Caractéristiques physico-mécaniques des matériaux .....40                         |
| 3.3.1                                                               | La terre de barre .....41                                                         |
| 3.3.2                                                               | Les celluloses utilisées .....41                                                  |
| 3.3.3                                                               | La formulation pour une brique en banco .....42                                   |
| CHAPITRE 2 : OPTIMISATION DE LA PORTEE DE LA VOÛTE NUBIENNE .....45 |                                                                                   |
| I-                                                                  | L'ALLURE IDEALE DE LA VOÛTE NUBIENNE .....45                                      |
| 1.1.                                                                | La théorie de la chaînette .....45                                                |
| 1.1.1.                                                              | Hypothèses sur la courbe de la chaînette .....45                                  |
| 1.1.2.                                                              | Expression mathématique de la courbe d'une chaînette .....47                      |
| 1.2.                                                                | Détermination de la portée maximale d'une chaînette .....52                       |
| 1.2.2.                                                              | La longueur développée de la chaînette.....52                                     |
| 1.2.3.                                                              | La flèche de la chaînette .....53                                                 |
| 1.3.                                                                | Modélisation de la Voûte Nubienne.....55                                          |
| 1.3.1.                                                              | La parité de la fonction cosinus hyperbolique .....56                             |
| 1.3.2.                                                              | Tracé de la courbe de la chaînette renversée au moyen du programme EXCEL .....57  |
| 1.4.                                                                | La nature des efforts dans la chaînette renversée.....61                          |
| II-                                                                 | STABILITE STRUCTURALE DE LA VOUTE NUBIENNE .....63                                |
| 2.1.                                                                | La descente des charges sur la voûte nubienne .....63                             |
| 2.1.1.                                                              | Le poids d'une brique.....63                                                      |
| 2.1.2.                                                              | La surface de remplage .....64                                                    |
| 2.2.                                                                | Détermination des efforts internes dans la voûte par la méthode graphique .....65 |
| 2.2.1.                                                              | La ligne des pressions .....65                                                    |
| 2.2.2.                                                              | Efforts normaux internes développés dans la voûte .....69                         |
| III-                                                                | CALCUL DE LA CONTRAINTE MAXIMALE INDUITE .....77                                  |
| 3.1.                                                                | La contrainte dans la voûte sans le remplage .....77                              |

|                                                                                   |                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                   |                                                                                    |
| 3.1.1.                                                                            | La contrainte maximale dans les briquettes .....77                                 |
| 3.1.2.                                                                            | La contrainte dans le mur porteur .....78                                          |
| 3.2.                                                                              | La contrainte maximale induite pour une voûte avec remplage .....82                |
| 3.2.1.                                                                            | La contrainte dans la brique.....82                                                |
| 3.2.2.                                                                            | La contrainte dans le mur porteur .....82                                          |
| 3.3.                                                                              | Equilibre statique de la voûte .....85                                             |
| 3.3.1.                                                                            | Frottement .....85                                                                 |
| 3.3.2.                                                                            | Equilibre limite du mur porteur .....87                                            |
| 3.3.3.                                                                            | Vérification de la stabilité de l'ouvrage .....93                                  |
| CHAPITRE 3 : MODELISATION ET SIMULATION DE LA PORTEE DE LA VOÛTE NUBIENNE .....95 |                                                                                    |
| I-                                                                                | MISE EN ŒUVRE DE LA VOUTE NUBIENNE .....95                                         |
| 1.1.                                                                              | La pose de brique dans la voûte .....95                                            |
| 1.1.1.                                                                            | L'inclinaison des briques lors de la pose .....95                                  |
| 1.1.2.                                                                            | L'appareillage des briques au niveau du mur porteur.....96                         |
| 1.2.                                                                              | Le mortier .....97                                                                 |
| 1.2.1.                                                                            | Le mortier de fabrication des briques .....97                                      |
| 1.2.2.                                                                            | Le mortier de pose des briques.....99                                              |
| II-                                                                               | MODELISATION DE LA VOUTE AVEC LE LOGICIEL ROBOT .....100                           |
| 2.1.                                                                              | La structure en voûte .....100                                                     |
| 2.2.                                                                              | Les étapes de la modélisation, au dimensionnement de la voûte .....101             |
| III-                                                                              | ANALYSE ET DISCUSSION .....118                                                     |
| 3.1.                                                                              | Présentation des résultats .....118                                                |
| 3.1.1.                                                                            | Récapitulatif des calculs sur VSR et sur VAR .....118                              |
| 3.1.2.                                                                            | Récapitulatif des calculs des contraintes normales dans les murs porteurs .....119 |



|                                  |                                                                                                      |     |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1.3.                           | Récapitulatif du résultat de la modélisation d'une VSR dans Robot comparé au calcul analytique ..... | 119 |
| 3.2.                             | Discussion .....                                                                                     | 120 |
| CONCLUSION.....                  |                                                                                                      | 125 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES..... |                                                                                                      | 127 |
| TABLE DES MATIERES .....         |                                                                                                      | 130 |